



TITLE:

ゲージ対称性を持つスピングラス 模型の研究(修士論文(2004年度))

AUTHOR(S):

森田, 悟史

CITATION:

森田, 悟史. ゲージ対称性を持つスピングラス模型の研究(修士論文
(2004年度)). 物性研究 2005, 85(1): 126-157

ISSUE DATE:

2005-10-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/110350>

RIGHT:

ゲージ対称性を持つスピングラス模型の研究¹

東京工業大学 大学院理工学研究科 森田 悟史²

概要

ゲージ対称性を持つスピングラス模型において幾つかの厳密な結果を証明する。まず2つの量子スピングラス、横磁場 Ising 模型と量子ゲージグラスにゲージ理論を拡張し、相関不等式を導出する。この不等式より強磁性相の存在領域が制限される。またゲージ不変な物理量に対する恒等式を証明する。これらの結果は、Schrödinger 方程式に従う時間発展を考える限り、任意の時間で成立する。

さらに、相互作用が平均が0でない Gauss 分布に従う Ising スピングラスにおいて Griffiths 不等式を証明する。この不等式は、相図のある曲線 (西森ライン) に沿って相関関数が非負かつ単調であることを意味している。この不等式を利用して、自由エネルギーや相関関数の熱力学的極限の存在を証明し、種々の格子での多重臨界点の位置を議論する。

目次

1 序論	127
2 古典スピン系におけるゲージ理論	129
2.1 Edwards-Anderson 模型のゲージ対称性	129
2.2 相関不等式と相図	130
2.3 内部エネルギーと比熱	132
2.4 ゲージグラス	133
3 量子スピン系におけるゲージ理論	135
3.1 横磁場 Ising 模型	135
3.2 量子ゲージグラス	141
4 スピングラス模型の Griffiths 不等式	145
4.1 強磁性体模型の Griffiths 不等式	146
4.2 Gauss 模型の Griffiths 不等式	146
4.3 不等式の応用	151
5 まとめ	153
A 強磁性体模型における Griffiths 不等式の証明	155

¹本稿は、東京工業大学に提出した修士論文「A Study of Spin Glass Models with Gauge Symmetry」を本誌掲載のため和訳した原稿である。

²E-mail: smorita@stat.phys.titech.ac.jp

1 序論

不規則な系は、今もなお、統計物理学において多くの注目を集めている。乱雑さが相転移にどのように影響するだろうか？ 新たな物理現象が存在するだろうか？ こういった疑問は、未だに完全には解明されていない。特に、スピングラスは、理論と実験の両面から精力的に研究が為されている [1]。

スピングラスは、空間的に非一様な相互作用を持つ磁性体である。この非一様性のために、スピンは同じ向きに揃うことができない。もし、系にフラストレーション、すなわち、互いに競合する相互作用が存在するならば、多くの準安定状態が出現する。十分に低い温度では、系は準安定状態の1つに長時間いることになる。つまり、スピンの時間的に凍結する。このような状態を、スピングラス状態と呼ぶ。このスピンの凍結する転移は、通常の臨界現象と異なることが知られている。例えば、線形磁化率がカスプ的な振る舞いをするのに対し、比熱は同じ温度でも全く異常を示さない。さらに、物理量の変化は、臨界温度までどのように冷却したかに依存する。これは、冷却方法によって落ち込む準安定状態が異なるからである。

スピングラスの理論的研究は、Edwards と Anderson によって、Edwards-Anderson 模型 (EA 模型) と呼ばれる基本的な模型が提唱された事により大きく進展した [2]。この模型のハミルトニアンは、

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j \quad (1.1)$$

で定義される。通常のスピングラス物質では、RKKY 相互作用

$$J_{ij} \propto \frac{\cos(2k_F r_{ij})}{r_{ij}^3}, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, \quad k_F : \text{Fermi 波数} \quad (1.2)$$

のように、 J_{ij} が2スピン間の距離によって振動する。そのため何らかの物理量を得るためには、スピンの向きと位置について平均を取らなくてはならない。この平均の取りかたには、二種類の方法がある。1つ目は、2つの平均を同時に取ってしまう方法で、アニール平均と呼ばれる。これは、スピン反転の時間スケールとスピン移動の時間スケールが、ほぼ同じ状況に対応する。この場合、スピンの移動によってフラストレーションが緩和されるため、スピングラス的な振る舞いは起こらない。もう1つの方法は、クエンチ平均と呼ばれる。まず、スピンの位置を固定した状態でスピンの向きだけについて平均し、その後、スピンの位置について平均を取る。これは、スピンの移動がスピン反転よりも十分遅いことを意味するので、現実のスピングラスと対応している。

上で述べたように、本質的にはスピンの位置によって乱雑さが生じるのだが、Edwards と Anderson は次のように簡略化した。各スピンの位置は通常の格子点に固定し、そのかわりに相互作用 J_{ij} が確率的に分布するとして、乱雑さを導入する。クエンチされた系では、 J_{ij} を固定して熱力学量を計算した後に、配位平均と呼ばれる J_{ij} についての平均を行う。例えば、自由エネルギーは、

$$F = -k_B T [\log Z] \quad (1.3)$$

と書ける。ここで、 $[\dots]$ が配位平均を表し、 Z は J_{ij} を固定して計算した分配関数である。

このような簡略化を行っても、依然として配位平均を計算するのは難しい。そこで、Edwards と Anderson はレプリカ法と呼ばれる手法を用いて、この問題を回避した。レプリカ法は恒等式

$$[\log Z] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{[Z^n] - 1}{n} \quad (1.4)$$

を利用する。 Z^n は n 個の複製された分配関数の積である。レプリカを導入することで、各レプリカ内のランダムな相互作用をレプリカ間の一様な有効相互作用に変えることができる。自由エ

エネルギーを得るためには、 n が自然数として $[Z^n]$ を計算し、 n が実数の領域へ解析接続をした後、 $n \rightarrow 0$ の極限を取る。Edwards と Anderson は平均場近似の元で $[Z^n]$ を評価し、磁化率がカスプ的な異常を示すことを示した。

この後、Sherrington と Kirkpatrick が EA 模型の無限レンジ版である Sherrington-Kirkpatrick 模型 (SK 模型) を厳密に解いた [3]。レプリカは人工的に導入したものであるため、全てのレプリカはお互い区別することができないと考えられる。そこで、彼らは全てのレプリカ間の秩序変数は等しいとするレプリカ対称性を仮定した。

この仮定の下で、SK 模型には常磁性相、強磁性相、スピングラス相の 3 つの相が存在することを彼らは示した。これら 3 つの相は 2 つの秩序変数で分類される。1 つは通常の磁化、 $m = [\langle S_i \rangle]$ である。ここで内側の括弧 $\langle \dots \rangle$ は熱平均を意味する。もう 1 つはスピングラス秩序変数と呼ばれ、 $q = [\langle S_i^2 \rangle]$ で定義される。系がスピングラス状態のとき、スピンはランダムな方向を向いているので、磁化は 0 である。しかし、スピンは時間的に凍結しているため、 $\langle S_i \rangle$ の値は 0 にはならない。よって、 q は正の値を取る。もし常磁性状態ならば、 $\langle S_i \rangle$ は熱揺らぎのため 0 になるため、 m と q が共に 0 になる。従って、3 つの相は次のように定義される。

- $m = 0, q = 0$: 常磁性相,
- $m > 0, q > 0$: 強磁性相,
- $m = 0, q > 0$: スピングラス相.

Sherrington と Kirkpatrick によるレプリカ対称性の仮定は妥当に思えるが、幾つかの問題がある。一例として、乱雑さが大きく低温の領域ではエントロピーが負になってしまう。de Almeida と Thouless はレプリカ対称解の安定性を調べ、AT 線と呼ばれる相図上の曲線の下でレプリカ対称性が破れることを発見した [4]。そして、Parisi により、AT 線の下でも安定で正のエントロピーを持つ、レプリカ対称性を破る解が提唱された [5]。この解は、超計量性や多谷構造など、非常に豊かな物理を含んでいる。

さて、無限レンジ系の解析がこのように成功しているのに対し、有限次元系の解析的な研究は数値計算によるものに比べ、非常に稀である。しかし、例外が幾つか存在する。そのうちの 1 つが、Nishimori によって提案されたゲージ理論である [6, 7]。系の局所的な対称性、ゲージ対称性を最大限利用することによって、西森ライン (NL) と呼ばれる相図上の特別な領域で、エネルギーの厳密解や比熱の上限を得ることができる。他の結果として、強磁性相の存在領域を限定する相関関数に対する不等式が証明される。Kitatani は確率分布を変更することによって、強磁性相とスピングラス相の相境界が垂直である事を示唆した [8]。また、Ozeki と Nishimori によって、ゲージ理論は EA 模型や XY 的な相互作用を持つ模型を含むゲージグラスへと一般化された [9]。

このようにゲージ理論は驚くべき結果を導出するが、これまでその対象は古典スピン系だけであった。そこで本研究の第 1 部として、ゲージ理論を一般化し、量子スピン系への拡張を行う。

近年、ゲージ対称性ではなく、Gauss 分布の性質を利用した厳密な結果が報告されている。例えば、Contucci と Graffi は、相互作用の分布が平均が 0 の Gauss 分布である EA 模型を考察し、自由エネルギーの単調性と熱力学的極限の存在を部分積分によって証明した [10]。

しかしながら、これらの研究の多くは、平均が 0 の分布を扱っている。本研究の第 2 部では、確率分布の平均が 0 でない場合を扱い、ゲージ理論と組み合わせることを考える。結果として、NL に沿って相関関数は非負かつ単調であることを証明する。これは、強磁性体模型での Griffiths 不等式 [16] に相当している。得られた不等式を用いて、相関関数と自由エネルギーの熱力学的極限の存在を証明する。また、様々な格子での多重臨界点の位置について議論する。

この論文は 5 つの章から構成される。次の章では、古典スピン系でのゲージ理論を再考する。ゲージ対称性と NL は、この章で解説をする。3 章では、ゲージ対称性をもつ 2 つの量子スピング

ラスを考察する．1つは横磁場 Ising 模型であり，もう1つは量子ゲージグラスである．どちらの模型でも，ユニタリー演算子を用いてゲージ変換が定義される．ゲージ理論より，強磁性相あるいは KT 相の存在領域を限定する相関不等式を証明する．また，ゲージ不変な物理量に対する恒等式を議論する．相互作用が Gauss 分布に従うスピングラス模型の Griffiths 不等式は，4章で証明する．証明に引き続き，その応用を議論する．最後の章で，全体のまとめを行う．

2 古典スピン系におけるゲージ理論

この章では，古典スピングラスのゲージ理論を簡単に振り返る．系の対称性を最大限に利用することにより，様々な厳密な結果を導くことができる．最初に EA 模型のゲージ理論について議論し，最後にゲージグラスについて触れる．

2.1 Edwards-Anderson 模型のゲージ対称性

まずは，EA 模型の局所的な対称性について考察する．この模型のハミルトニアンは，

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j \quad (2.1)$$

で与えられる． S_i は，格子点 i 上の Ising スピンで， ± 1 の値を取る． H 内の和は，考えている格子上の全てのボンドについて取る．系の次元や，格子の形状は任意とする．

序論で述べたように交換相互作用 J_{ij} は，クエンチされたランダムな変数である．ゲージ理論を上手く展開するために，ここでは J_{ij} の確率分布として二値分布と Gauss 分布の2つを考える．二値分布は

$$P(J_{ij}) = p \delta(J_{ij} - J) + (1 - p) \delta(J_{ij} + J) \quad (2.2)$$

で定義され，確率 p で $+J$ ， $1 - p$ で $-J$ を取る．今後の議論のため， J_{ij} の符号 $\tau_{ij} = J_{ij}/J$ を用いて，

$$P(J_{ij}) = \frac{e^{K_p \tau_{ij}}}{2 \cosh K_p}, \quad K_p = \frac{1}{2} \log \frac{p}{1-p} \quad (2.3)$$

と変形しておく．Gauss 分布は，平均 J_0 ，分散 σ^2 とすれば

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.4)$$

となる．前者の確率分布 (2.3) に従うスピングラス模型は $\pm J$ 模型，後者 (2.4) に従うものは Gauss 模型と呼ばれる．

ここで，格子点 i 上の Ising スピンに対する局所変換を

$$U: S_i \rightarrow S_i \xi_i \quad (2.5)$$

と定義する． ξ_i はゲージ変数と呼ばれ， ± 1 の二値を取る．さらに，相互作用 J_{ij} に対する変換を

$$V: J_{ij} \rightarrow J_{ij} \xi_i \xi_j \quad (2.6)$$

で定義する．これらの変換が，ゲージ変換と呼ばれる．

上で定義された変換 U と V によって、模型がどの様に変換されるか考える。ゲージ変数 ξ_i の二乗は 1 なので、直ちにハミルトニアンは変換 UV に対して不変、すなわちゲージ不変であることが分かる。

$$(UV)H = - \sum_{\langle ij \rangle} (J_{ij} \xi_i \xi_j) (S_i \xi_i) (S_j \xi_j) = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j = H. \quad (2.7)$$

しかし、相互作用の確率分布は、ゲージ変換によって形が変わる。 $\pm J$ 模型では、

$$P(J_{ij}) \rightarrow \frac{e^{K_p \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{2 \cosh K_p} \quad (2.8)$$

と確率分布が変化する。この変換された確率分布が Boltzmann 因子と類似したものに比例している事が、ゲージ理論においては重要な鍵となる。

同様に、Gauss 分布は

$$P(J_{ij}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{J_{ij}^2 + J_0^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{J_0}{\sigma^2} J_{ij} \xi_i \xi_j\right) \quad (2.9)$$

と変換される。簡単のため、この章では二値分布 (2.2) のみに注目し、Gauss 分布の場合は必要があるときのみ言及する。

2.2 相関不等式と相図

ゲージ変換に対する系の対称性を用いて、相関関数に対する不等式を導出することができる。さらに、秩序変数に対する恒等式を相図の特定領域で証明する。これらは、相図の構造に強い制限を与える。

$\pm J$ 模型の 2 点相関関数

$$[\langle S_0 S_r \rangle_K]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij}}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \frac{\text{Tr } S_0 S_r \exp\left(K \sum_{ij} \tau_{ij} S_i S_j\right)}{\text{Tr} \exp\left(K \sum_{ij} \tau_{ij} S_i S_j\right)} \quad (2.10)$$

を考える。ここで、パラメータ K は逆温度 $\beta = (k_B T)^{-1}$ をもちいて $K = \beta J$ と定義され、 N_B は考えている格子のボンドの本数である。左辺内側の括弧 $\langle \dots \rangle$ は温度 T の熱平均を表し、外側の括弧 $[\dots]$ は確率を決めるパラメータ K_p での配位平均を意味する。

相互作用に対するゲージ変換 V は、単なる変数変換であり、式の中の τ_{ij} を全て $\tau_{ij} \xi_i \xi_j$ に変える。最初の和 $\sum_{\{\tau_{ij}\}}$ も $\{\tau_{ij} \xi_i \xi_j\}$ に対する和になる。しかし、 $\{\tau_{ij} \xi_i \xi_j\}$ で和を取っても $\{\tau_{ij}\}$ で取っても、順番が入れ替わっただけで ± 1 で和を取ることは変わらないので、両者は同じである。つまり、和 $\sum_{\{\tau_{ij}\}}$ の中で変換 V を施しても上の式の値は変わらない。よって、

$$[\langle S_0 S_r \rangle_K]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \frac{\text{Tr } S_0 S_r \exp\left(K \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j S_i S_j\right)}{\text{Tr} \exp\left(K \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j S_i S_j\right)} \quad (2.11)$$

を得る。同様に、分母分子にあるトレースの中に、スピンに対するゲージ変換 U を挿入することができる。ハミルトニアンの対称性を用いると、

$$\begin{aligned} [\langle S_0 S_r \rangle_K]_{K_p} &= \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \frac{\text{Tr } \xi_0 \xi_r S_0 S_r \exp\left(K \sum_{ij} \tau_{ij} S_i S_j\right)}{\text{Tr} \exp\left(K \sum_{ij} \tau_{ij} S_i S_j\right)} \\ &= \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{\xi_0 \xi_r e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \langle S_0 S_r \rangle_K \end{aligned} \quad (2.12)$$

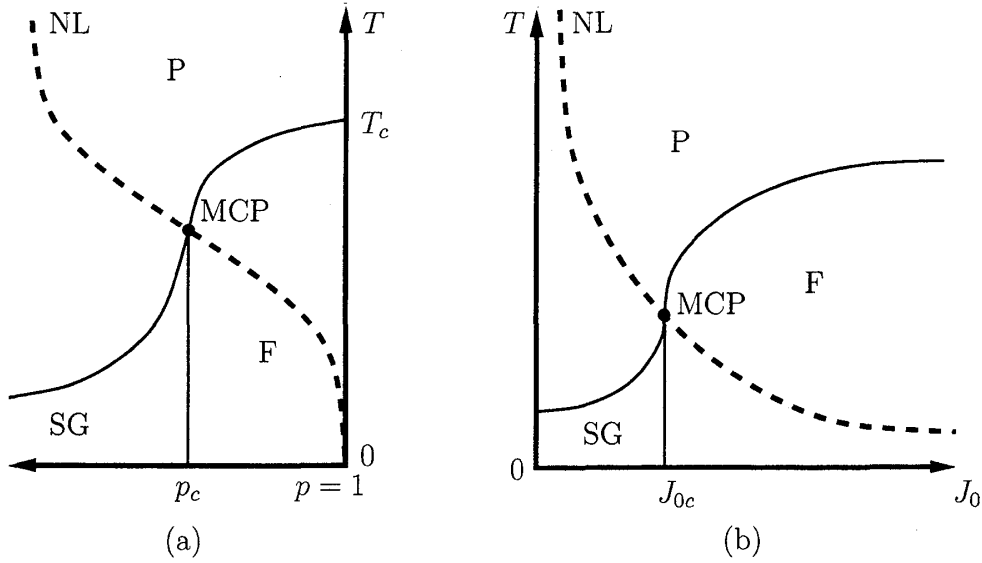


図 1: (a) $\pm J$ 模型の相図と (b) Gauss 模型の相図. それぞれ常磁性相 (P), 強磁性相 (F), スピングラス相 (SG) の三つの相が存在する. 破線の西森ライン (NL) は, 多重臨界点 (MCP) で相境界と交わる.

となる. ここまでの導出で, ゲージ変数 ξ_i の値には何の制約も課していない. そこで, $\{\xi_i\}$ の全ての場合について和を取り, 2^N (N はスピンの数) で割っても構わない. $\{\xi_i\}$ の和を Tr_ξ と書けば,

$$[\langle S_0 S_r \rangle_K]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{\text{Tr}_\xi \xi_0 \xi_r e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{2^N (2 \cosh K_p)^{N_B}} \langle S_0 S_r \rangle_K \quad (2.13)$$

である. 分母分子に $K = K_p$ での分配関数を挿入すると,

$$\begin{aligned} [\langle S_0 S_r \rangle_K]_{K_p} &= \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{\text{Tr}_\xi e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{2^N (2 \cosh K_p)^{N_B}} \frac{\text{Tr}_\xi \xi_0 \xi_r e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{\text{Tr}_\xi e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}} \langle S_0 S_r \rangle_K \\ &= \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{\text{Tr}_\xi e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{2^N (2 \cosh K_p)^{N_B}} \langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p} \langle S_0 S_r \rangle_K \\ &= [\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p} \langle S_0 S_r \rangle_K]_{K_p} \end{aligned} \quad (2.14)$$

を得る. 最後の等号を確認するには, 最終行にゲージ変換を再度施して, $\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p} \langle S_0 S_r \rangle_K$ がゲージ不変であることを利用すればよい.

この恒等式 (2.14) の絶対値を取り, 相関関数が 1 を越えない事を用いると,

$$\begin{aligned} |[\langle S_0 S_r \rangle_K]_{K_p}| &\leq \left[|\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p} \langle S_0 S_r \rangle_K| \right]_{K_p} \\ &\leq \left[|\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}| \right]_{K_p} \end{aligned} \quad (2.15)$$

を証明することができる. 式 (2.15) の右辺は, $K = K_p$ を満たす領域における, ある種の相関関数である. この $K = K_p$ という条件は, 図 1(a) の T - p 相図において一つの線を表し, 西森ライン (NL) と呼ばれる. Gauss 模型の NL は

$$J_0 = \sigma^2 \beta \quad (2.16)$$

で定義され、図 1(b) にある相図の双曲線になる。

$K = K_p$ のもとで式 (2.14) の $r \rightarrow \infty$ の極限を取ると、秩序変数の恒等式を導くことができる。 r が十分大きいならば、サイト 0 と r のスピンは独立と見なせるので、式 (2.14) の左辺は、磁化の二乗になる。一方、右辺はスピングラス秩序変数の二乗になる。従って、NL 上で

$$m = q \quad (2.17)$$

を得る。この結果は、磁化 $[\langle S_i \rangle_K]_K$ に直接ゲージ理論を適用しても導ける。

不等式 (2.15) と恒等式 (2.17) によって、相図の構造が制限される。恒等式 (2.17) はスピングラス相の定義 ($m = 0, q > 0$) に反するので、スピングラス相は NL 上に存在できない事が分かる。また、不等式 (2.15) によって、強磁性相の位置が制限される。相図上で p 一定の垂直な線を考え、その直線と NL の交点が常磁性相にあるとしよう。このとき、式 (2.15) の右辺は 0 になる。よって、左辺は K によらず 0 にならなければならない。 $r \rightarrow \infty$ の極限で左辺は磁化の二乗になるので、強磁性相はこの垂直線上には存在しない。このことは、強磁性相とスピングラス相の相境界が、垂直もしくは強磁性側に曲がる事を意味する。Kitatani は、確率分布を変更することで、この相境界の垂直性を議論している [8]。常磁性相、強磁性相、スピングラス相の 3 つが交わる多重臨界点が NL 上にあることは、数値計算や繰り込み群による解析によって、ほぼ確実視されている。[11, 12]

2.3 内部エネルギーと比熱

ゲージ理論のもう一つの特筆すべき結果が、NL 上での内部エネルギーの厳密解と比熱の上限である。これらの結果を得るために、ランダムな相互作用の平均

$$[J_{kl}]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij}}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} J_{kl} \quad (2.18)$$

を考える。式 (2.11) を導出したのと同様に、相互作用をゲージ変換しても上式の値は変化しない。よって、

$$[J_{kl}]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} J_{kl} \xi_k \xi_l \quad (2.19)$$

となる。 ξ_i の値は ± 1 のどちらでもよいので、先程と同様に $\{\xi_i\}$ の全ての場合について和をとり、 2^N で割っても良い。さらに、分母分子に $K = K_p$ での分配関数を挿入すれば、

$$\begin{aligned} [J_{kl}]_{K_p} &= \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{\text{Tr}_{\xi} e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \frac{\text{Tr} J_{kl} S_k S_l e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} S_i S_j}}{\text{Tr} e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} S_i S_j}} \\ &= \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{\text{Tr}_{\xi} e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \langle J_{kl} S_k S_l \rangle_{K_p} \\ &= \left[\langle J_{kl} S_k S_l \rangle_{K_p} \right]_{K_p} \end{aligned} \quad (2.20)$$

を得る。途中でスピンの記号を適宜 ξ_i から S_i に変更している。最後の等式は、 $\langle J_{kl} S_k S_l \rangle_{K_p}$ がゲージ不変であることを利用し、ゲージ変換を行うことで導出できる。一方で、ランダムな相互作用の平均は簡単に計算することができて、

$$[J_{kl}]_{K_p} = J \tanh K_p \quad (2.21)$$

である。従って、NL 上の内部エネルギーの厳密解は次のように求まる。

$$\left[\langle H \rangle_{K_p} \right]_{K_p} = - \sum_{\langle ij \rangle} \left[\langle J_{ij} S_i S_j \rangle_{K_p} \right]_{K_p} = -N_B J \tanh K_p \quad (2.22)$$

比熱の上限は Schwarz の不等式を用いて、

$$\begin{aligned} k_B T^2 [C] &= - \frac{\partial}{\partial \beta} [\langle H \rangle_{K_p}]_{K_p} \\ &= [\langle H^2 \rangle_{K_p}]_{K_p} - [\langle H \rangle_{K_p}^2]_{K_p} \\ &\leq [\langle H^2 \rangle_{K_p}]_{K_p} - [\langle H \rangle_{K_p}]_{K_p}^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

と評価できる。NL 上では、最初の項も式 (2.22) と同じ様に計算できる。ゲージ理論より、

$$\left[\langle H^2 \rangle_{K_p} \right]_{K_p} = \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\langle kl \rangle} \left[\langle J_{ij} S_i S_j J_{kl} S_k S_l \rangle_{K_p} \right]_{K_p} = \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\langle kl \rangle} [J_{ij} J_{kl}]_{K_p} \quad (2.24)$$

となり、直接計算より右辺は、

$$[J_{ij} J_{kl}]_{K_p} = \begin{cases} J^2 & (ij) = (kl) \\ J^2 \tanh^2 K_p & (ij) \neq (kl) \end{cases} \quad (2.25)$$

である。式 (2.25) を式 (2.24) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \left[\langle H^2 \rangle_{K_p} \right]_{K_p} &= N_B (N_B - 1) J^2 \tanh^2 K_p + N_B J^2 \\ &= N_B^2 J^2 \tanh^2 K_p + N_B J^2 \operatorname{sech}^2 K_p \end{aligned} \quad (2.26)$$

を得る。式 (2.22) を用いると、最終的に比熱の上限は

$$k_B T^2 [C] \leq N_B J^2 \operatorname{sech}^2 K_p \quad (2.27)$$

と求まる。

Gauss 模型における NL 上の内部エネルギーの厳密解と比熱の上限は、以下の通りである。

$$[\langle H \rangle] = -N_B J_0, \quad (2.28)$$

$$k_B T^2 [C] \leq N_B \sigma^2. \quad (2.29)$$

式 (2.22) は、NL 上で内部エネルギーは特異性を持たないことを意味している。図 1 で明らかのように NL は相境界を横切るので、この事実は非常に奇妙である。さらに、式 (2.27) で与えられる比熱の上限は有限なので、転移点で比熱は発散しない。自由エネルギーや磁化率など他の物理量は、NL 上の臨界点でも特異性を持つと思われる。

2.4 ゲージグラス

ここまで、Ising スピン系でのゲージ理論を展開してきた。ゲージ理論を適用できるより一般的な模型として、ゲージグラスがある [9]。ゲージグラスは、ゲージ対称性を持つ様々なスピン系を含んでいるが、ここでは、XY ゲージグラスに焦点を当て、この模型ではどの様にゲージ理論が構成されるかを概観する。

XY ゲージグラスのハミルトニアンは,

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\phi_i - \phi_j - \omega_{ij}) \quad (2.30)$$

で定義される. $\phi_i \in [0, 2\pi)$ が, サイト i 上の 2 次元スピン変数である. クエンチされた乱雑さは, 位相因子 $\omega_{ij} \in [0, 2\pi)$ によって導入される. この模型は様々な系に対応しており, 例えば, ランダムな Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用を持つ磁性体 (3.2.1 節参照) や, 位置の乱雑さを持つ Josephson 結合配列などがある [13].

ランダムな位相因子 ω_{ij} の確率分布は,

$$P(\omega_{ij}) = \frac{e^{K_p \cos \omega_{ij}}}{2\pi I_0(K_p)} \quad (2.31)$$

であるとする. ここで, $I_0(K_p)$ は変形 Bessel 関数である. この確率分布は, $\omega_{ij} = 0$ でピークを持つ. また, $K_p \rightarrow \infty$ の極限でデルタ関数 $\delta(\omega_{ij})$ になり, $K_p = 0$ では一様分布になる.

スピンとランダム変数に対するゲージ変換を,

$$U : \phi_i \rightarrow \phi_i - \psi_i, \quad (2.32)$$

$$V : \omega_{ij} \rightarrow \omega_{ij} - \psi_i + \psi_j \quad (2.33)$$

で定義する. $\psi_i \in [0, 2\pi)$ がサイト i 上のゲージ変数である. 2つのゲージ変換 UV を同時に施しても, この模型のハミルトニアンは不変である. 確率分布 (2.31) は, ゲージ変換により

$$P(\omega_{ij}) \rightarrow \frac{e^{K_p \cos(\omega_{ij} - \psi_i + \psi_j)}}{2\pi I_0(K_p)} \quad (2.34)$$

と変化する. コサイン型の確率分布 (2.31) を選択した理由は, このように変換された確率分布が Boltzmann 因子に比例するためである. NL は, $\pm J$ 模型と同様に $K = K_p$ で定義される.

ハミルトニアンのゲージ対称性より, EA 模型と同様の結果を得ることができる. まず初めに, NL 上の内部エネルギーの厳密解を導く. 式 (2.20) との類推より, 次の量を考える.

$$[\cos \omega_{kl}]_{K_p} = \int \prod_{\langle ij \rangle} d\omega_{ij} \frac{e^{K_p \cos \omega_{ij}}}{2\pi I_0(K_p)} \cos \omega_{kl} \quad (2.35)$$

上の被積分関数は ω_{ij} に対して周期的なので, ランダム変数の変換 V によって上式の値は変化しない. つまり,

$$[\cos \omega_{kl}]_{K_p} = \int \prod_{\langle ij \rangle} d\omega_{ij} \frac{e^{K_p \cos(\omega_{ij} - \psi_i + \psi_j)}}{2\pi I_0(K_p)} \cos(\omega_{kl} - \psi_k + \psi_l) \quad (2.36)$$

である. 残りの議論は, 式 (2.20) の導出と同じである. ψ_i について積分し, $(2\pi)^N$ で割る. そして, 分母分子に $K = K_p$ での分配関数を挿入する. その結果,

$$[\cos \omega_{kl}]_{K_p} = \left[\langle \cos(\omega_{kl} - \psi_k + \psi_l) \rangle_{K_p} \right]_{K_p} \quad (2.37)$$

を得る. 変形 Bessel 関数の積分表示

$$2\pi I_n(K_p) = \int_0^{2\pi} d\omega e^{K_p \cos \omega} \cos n\omega, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.38)$$

を用いると、左辺は $I_1(K_p)/I_0(K_p)$ と計算できる。結局、NL 上での内部エネルギーの厳密解は、

$$\left[\langle H \rangle_{K_p} \right]_{K_p} = -N_B J \frac{I_1(K_p)}{I_0(K_p)} \quad (2.39)$$

と求まる。 $K_p > 0$ で $I_1(K_p)/I_0(K_p)$ は滑らかである。つまり、NL 上では内部エネルギーに特異性は無い。

同様に、NL 上で比熱の上限は、

$$k_B T^2 [C] \leq N_B J^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{I_2(K_p)}{2I_0(K_p)} - \left(\frac{I_1(K_p)}{I_0(K_p)} \right)^2 \right\} \quad (2.40)$$

と求まる。右辺は、臨界点であっても有限である。

相関不等式も、EA 模型とほぼ同様の議論で導出できる。この模型の相関関数は、 $[\langle \cos(\phi_0 - \phi_r) \rangle_K]_{K_p}$ または、 $[\langle e^{i(\phi_0 - \phi_r)} \rangle_K]_{K_p}$ で定義される。後者の虚数部分はスピン反転対称性により消えるので、両者は等しい。ゲージ理論を適用するには後者の方が都合が良く、

$$\left[\langle e^{i(\phi_0 - \phi_r)} \rangle_K \right]_{K_p} = \left[\langle e^{-i(\psi_0 - \psi_r)} \rangle_{K_p} \langle e^{i(\phi_0 - \phi_r)} \rangle_K \right]_{K_p} \quad (2.41)$$

となる。両辺の絶対値を取ると、

$$\left| [\langle \cos(\phi_0 - \phi_r) \rangle_K]_{K_p} \right| \leq \left[|\langle \cos(\psi_0 - \psi_r) \rangle_{K_p}| \right]_{K_p} \quad (2.42)$$

が導ける。EA 模型の場合と同じ様に、この不等式は NL より下にある強磁性相と非強磁性相の相境界が、垂直か強磁性相側に曲がっているかのどちらかである事を示している。

3 量子スピン系におけるゲージ理論

量子スピン系では、スピン演算子が交換関係を満たす必要があるため、単純にゲージ変換を定義することはできない。古典的に全てスピン成分の符号が反転したとすると、交換関係が破れてしまう。この章では、回転演算子を用いてゲージ変換を定義し、2つの量子系、横磁場 Ising 模型と量子ゲージグラスにおいて、ゲージ理論を構成する。

3.1 横磁場 Ising 模型

まずは、乱雑さを含む最も単純な量子スピン系として、横磁場を加えた EA 模型を考える。この模型のハミルトニアンは、

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_i \sigma_i^x \quad (3.1)$$

で定義される。ここで、 $\sigma_i^\alpha (\alpha = x, y, z)$ は Pauli 演算子で、サイト i 上にある $S = 1/2$ の量子スピン演算子を表す。系の次元や格子の構造には、制限を加えない。クエンチされたランダム変数 J_{ij} は、EA 模型と同じように、二値分布 (2.2) 又は Gauss 分布 (2.4) に従うものとする。

3.1.1 ゲージ変換

量子スピン系でどのようにゲージ変換を定義するかを考える。スピンの全成分を同時に反転する古典的なゲージ変換

$$(\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z) \rightarrow (-\sigma_i^x, -\sigma_i^y, -\sigma_i^z) \quad (3.2)$$

では、交換関係 $[\sigma_i^x, \sigma_i^y] = 2i\sigma_i^z$ が $[\sigma_i^x, \sigma_i^y] = -2i\sigma_i^z$ と変わってしまうため、適切ではない。また、一成分だけを反転しても交換関係を破ってしまう。そこで、次のようなユニタリ演算子によってスピンのゲージ変換を定義する。

$$U : \sigma_i^\alpha \rightarrow G \sigma_i^\alpha G^{-1}, \quad G = \prod_i G_i, \quad G_i = \begin{cases} 1_i & (\xi_i = +1) \\ \exp\left(-\frac{i\pi}{2} \sigma_i^x\right) & (\xi_i = -1) \end{cases} \quad (3.3)$$

ξ_i がサイト i のゲージ変数で、古典系と同様に ± 1 の二値を取る。 $\xi_i = +1$ のときは、 G_i は恒等演算子となり、スピン演算子は変化しない。一方、 $\xi_i = -1$ のときは、 $\sigma_i^{y,z} \rightarrow -\sigma_i^{y,z}$, $\sigma_i^x \rightarrow \sigma_i^x$ となる。従って、古典 Ising スピン系のゲージ変換 (2.5) に対応して、

$$U : (\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z) \rightarrow (\sigma_i^x, \xi_i \sigma_i^y, \xi_i \sigma_i^z) \quad (3.4)$$

と書くことができる。量子系と古典系のゲージ変換の違いは、スピンの x 成分の変換則である。これは、量子スピンが交換関係を満足するために不可欠である。

ランダム変数 J_{ij} に対するゲージ変換は、古典系 (2.6) と同じである。すなわち、

$$V : J_{ij} \rightarrow J_{ij} \xi_i \xi_j \quad (3.5)$$

とする。横磁場 h はゲージ変換によって変化しない。後々のため V によって変換された演算子をチルダを用いて表す。例えば、

$$\tilde{H} = V H = - \sum_{\langle ij \rangle} (J_{ij} \xi_i \xi_j) \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_i \sigma_i^x \quad (3.6)$$

である。

以上のようにゲージ変換を定義すると、横磁場 Ising 模型のハミルトニアンは変換 UV に対し不変である。 ξ_i の二乗が 1 であることを用いると、次のように直ちに示することができる。

$$\begin{aligned} (UV)H &= - \sum_{\langle ij \rangle} (J_{ij} \xi_i \xi_j) (\xi_i \sigma_i^z) (\xi_j \sigma_j^z) - h \sum_i \sigma_i^x \\ &= - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_i \sigma_i^x = H \end{aligned} \quad (3.7)$$

次に、このハミルトニアンのゲージ対称性を利用して、平衡状態について相関不等式が成立することを証明する。

3.1.2 平衡状態の相関不等式

量子統計力学に基づけば、量子系の平衡状態は密度行列で記述される。カノニカル分布の密度行列は、

$$\rho(K, h) = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \quad (3.8)$$

で定義される。横磁場 Ising 模型のハミルトニアンはゲージ対称性を持つので、この密度行列もゲージ変換 UV に対して不変である。

相互作用方向、つまり z 方向の 2 点相関関数、

$$[\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h}]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij}}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \frac{\text{Tr} \sigma_0^z \sigma_r^z e^{-\beta H}}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \quad (3.9)$$

を考える。内側の括弧 $\langle \cdots \rangle_{K,h}$ は、温度 β^{-1} 、横磁場 h での熱平均を表している。ゲージ変換を用いると、相関関数に対する恒等式

$$[\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h}]_{K_p} = \left[\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h} \right]_{K_p} \quad (3.10)$$

を証明することができる。 $\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c$ は、同じ配位 $\{\tau_{ij}\}$ で横磁場が無い古典 Ising 模型での相関関数である。

上の恒等式の証明は、古典系における相関関数の恒等式 (2.14) と同様である。まず、確率変数のゲージ変換 V を考える。この変換を作用させても、式 (3.9) に現れる最初の和 $\sum_{\{\tau_{ij}\}}$ の順番を入れ換えるだけである。従って、

$$\left[\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h} \right]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \frac{\text{Tr} \sigma_0^z \sigma_r^z \exp \left(K \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j \sigma_i^z \sigma_j^z \right)}{\text{Tr} \exp \left(K \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j \sigma_i^z \sigma_j^z \right)} \quad (3.11)$$

である。次に、分母分子にある Tr の中で、スピンに対するゲージ変換 U を作用させる。演算子 G はユニタリーなので、トレースの値は変わらない。ハミルトニアンのゲージ対称性より、指数関数の肩にあった ξ_i が消え、代わりに $\xi_0 \xi_r$ が分子に現れる。熱平均の定義を用いると、

$$\left[\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h} \right]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{\xi_0 \xi_r e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h} \quad (3.12)$$

となる。ここまでの計算では、 ξ_i の値は ± 1 のどちらでも構わないので、 $\{\xi_i\}$ の全ての場合について和を取り、 2^N で割る。そして、分母分子に古典系の $K = K_p$ における分配関数を挿入すると、古典系での相関関数が現れ、

$$\left[\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h} \right]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{\text{Tr}_\xi e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{2^N (2 \cosh K_p)^{N_B}} \langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h} \quad (3.13)$$

を得る。最後に、式 (3.10) の右辺をゲージ変換する。量子スピン σ_i^α だけでなく、もともとはゲージ変数だった古典スピン ξ_i も変える別のゲージ変換

$$\begin{aligned} U' : \sigma_i^{y,z} &\rightarrow \xi'_i \sigma_i^{y,z}, \quad \sigma_i^x \rightarrow \sigma_i^x, \quad \xi_i \rightarrow \xi'_i \xi_i \\ V' : J_{ij} &\rightarrow J_{ij} \xi'_i \xi'_j \end{aligned} \quad (3.14)$$

を定義する。 $\xi'_i = \pm 1$ が新たなゲージ変数である。 $\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h}$ が変換 $U'V'$ に対し不変なので、式 (3.10) の右辺は、この変換によって、

$$\left[\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h} \right]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{e^{K_p \sum_{ij} \tau_{ij} \xi'_i \xi'_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h} \quad (3.15)$$

となる。 ξ'_i は ± 1 のどちらでもよいので、 $\{\xi_i\}$ の全ての場合について和を取り、 2^N で割っても良い。つまり、式 (3.15) と式 (3.13) は等しい。従って、恒等式 (3.10) が証明された。

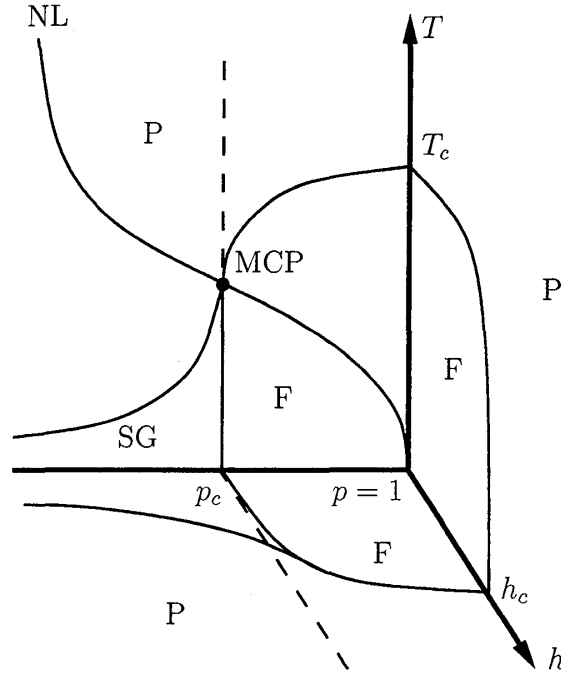


図 2: 横磁場 Ising 模型の予想される相図. $h = 0$ の平面が, 古典系に対応する. 破線 ($p = p_c$) が強磁性相の存在限界.

この恒等式 (3.10) の絶対値を取ることによって, 相関不等式

$$\begin{aligned} \left| [\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h}]_{K_p} \right| &\leq \left[\left| \langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c \langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h} \right| \right]_{K_p} \\ &\leq \left[\left| \langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c \right| \right]_{K_p} \end{aligned} \quad (3.16)$$

が証明できる. ここで, $\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h}$ の絶対値が 1 以下であることを用いた. 同様にして,

$$\left| \left[\text{sgn} \left(\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h} \right) \right]_{K_p} \right| \leq \left[\left| \langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c \right| \right]_{K_p}, \quad (3.17)$$

$$\left[\frac{\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c}{\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h}} \right]_{K_p} = \left[\frac{1}{\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle_{K,h}} \right]_{K_p} \geq 1 \quad (3.18)$$

も証明できる.

これらの不等式より, 強磁性相の存在限界が議論できる. もし, 強磁性相互作用の確率 p が, 古典系の多重臨界点の確率 p_c より小さいならば, 不等式 (3.16) の右辺は消える. 従って, このとき横磁場 Ising 模型の相関関数も 0 になる. つまり, 強磁性相の領域が, $p > p_c$ の範囲に限定される. (図 2) この結果は, 至って自然である. 横磁場は, スピンを反転させる働きがあるため, 量子揺らぎとして捉えることができる. この揺らぎによって, 横磁場 Ising 模型の相関は, 古典系に比べ減少する. この事は, 不等式 (3.18) から観測される.

3.1.3 動的な場合

前節での結果は, 横磁場が時間に依存するような非平衡状態に一般化することができる. 横磁場の時間依存性として古典系での例 [14] を想定し, 時間発展は Schrödinger 方程式に従う絶対零

度でのものを考える。T 積を用いると、時間発展演算子は

$$U_t = T \exp \left(-i \int_0^t H(t') dt' \right) \quad (3.19)$$

と書ける。ハミルトニアン H の時間依存性はゲージ対称性に影響しないので、この時間発展演算子もゲージ不変である。

$$(UV)U_t = G(VU_t)G^{-1} = G\tilde{U}_tG^{-1} = U_t. \quad (3.20)$$

A. 相関関数

まず、初期状態の密度演算子がゲージ不変なとき、相関不等式 (3.16) が任意の時刻で成立することを証明する。始めに、初期状態として、全てのスピンの x 方向上向きの場合を考える。この状態を $|F_x\rangle$ とすると、

$$|F_x\rangle = |x+\rangle_1 |x+\rangle_2 \cdots |x+\rangle_N, \quad \sigma_i^x |x+\rangle_i = |x+\rangle_i \quad (3.21)$$

である。時刻 t での相互作用と同じ方向 (z 方向) の相関関数、

$$\begin{aligned} [\langle \sigma_0^z(t) \sigma_r^z(t) \rangle_{F_x}]_{K_p} &= \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{e^{K_p \sum \tau_{ij}}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \langle F_x | U_t^\dagger \sigma_0^z \sigma_r^z U_t | F_x \rangle \\ &= \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{e^{K_p \sum \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \langle F_x | \tilde{U}_t^\dagger \sigma_0^z \sigma_r^z \tilde{U}_t | F_x \rangle \end{aligned} \quad (3.22)$$

を考える。最後の行で、相互作用に対するゲージ変換 V を施している。スピンに対するゲージ変換演算子 G はユニタリーなので、演算子の間に恒等演算子 $G^{-1}G$ を挿入することができる。式 (3.20) 及びスピンの変換則より、最後の期待値は

$$\langle F_x | \tilde{U}_t^\dagger \sigma_0^z \sigma_r^z \tilde{U}_t | F_x \rangle = \xi_0 \xi_r \langle F_x | G^{-1} U_t^\dagger \sigma_0^z \sigma_r^z U_t G | F_x \rangle \quad (3.23)$$

となる。

前節とは異なり、初期状態がゲージ変換演算子 G によってどの様に変化するかを考える必要がある。今の場合、演算子 G は x 軸回りの回転演算子と恒等演算子の積なので、 $|F_x\rangle$ は演算子 G の固有状態で、固有値の絶対値は 1 である。従って、

$$[\langle \sigma_0^z(t) \sigma_r^z(t) \rangle_{F_x}]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{\xi_0 \xi_r e^{K_p \sum \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \langle F_x | U_t^\dagger \sigma_0^z \sigma_r^z U_t | F_x \rangle \quad (3.24)$$

を得る。

後は前節と同様な議論により、恒等式

$$[\langle \sigma_0^z(t) \sigma_r^z(t) \rangle_{F_x}]_{K_p} = \left[\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c \langle \sigma_0^z(t) \sigma_r^z(t) \rangle_{F_x} \right]_{K_p} \quad (3.25)$$

を証明することができる。さらに、両辺の絶対値を取れば、相関関数の上限

$$\left| [\langle \sigma_0^z(t) \sigma_r^z(t) \rangle_{F_x}]_{K_p} \right| \leq \left[\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c \right]_{K_p} \quad (3.26)$$

が導出できる。

この不等式の意味は、次の通りである。 x 方向上向きに揃った状態は、横磁場が非常に強い極限に対応している。もし、強磁場極限から始めて、磁場を 0 まで減少させたとしても、相関関数は、

NL 上の古典系のものを決して越えることは無い。この結果は、磁場変化の仕方に依らず、任意の時刻で成立する。

上の不等式と同様にして、

$$\left| \left[\langle \sigma_0^z(t) \sigma_r^z(t) \rangle_{K,h} \right]_{K_p} \right| \leq \left[\left[\langle \xi_0 \xi_r \rangle_{K_p}^c \right] \right]_{K_p} \quad (3.27)$$

が証明できる。平衡状態の密度行列 $\rho(K, h)$ はゲージ不変なので、左辺の配位平均内にある相関関数は、ゲージ変換 V によって

$$\langle \sigma_0^z(t) \sigma_r^z(t) \rangle_{K,h} \rightarrow \xi_0 \xi_r \langle \sigma_0^z(t) \sigma_r^z(t) \rangle_{K,h} \quad (3.28)$$

と変化する。従って、これまでの議論と同様にして、恒等式 (3.25) の初期条件を平衡状態 $\rho(K, h)$ に変えたものが直ちに証明できる。この恒等式の絶対値を取り、上限を評価したのが (3.27) である。この不等式が、(3.16) の動的な場合である。初期状態が平衡状態である限り、常に相関関数は NL 上の古典系のもので抑えられる。

B. ゲージ不変な物理量

次に、ゲージ不変な演算子に対する恒等式を証明する。ある演算子 Q がゲージ不変であるとは、 $Q = (UV)Q$ が成立するという意味である。例を挙げると、自己相関関数 $\sigma_i^z(0)\sigma_i^z(t)$ 、横磁場方向の磁化 $\sigma_i^x(t)$ 、エネルギーの相互作用項などがある。

このゲージ不変な演算子に対し、次の恒等式が証明できる。

$$[\langle Q(t) \rangle_{F_z}]_{K_p} = [\langle Q(t) \rangle_{K_p,0}]_{K_p}. \quad (3.29)$$

左辺は、系が始め完全な強磁性状態 $|F_z\rangle$ のときの期待値である。この状態は、 $\beta^{-1} = 0$, $p = 1$, $h = 0$ の強磁性極限で現れる。ゲージ変換演算子 G によって、完全強磁性状態は

$$G|F_z\rangle = |\xi\rangle, \quad |\xi\rangle = |\xi\rangle_1 |\xi\rangle_2 \cdots |\xi\rangle_N \quad (3.30)$$

と変化する。 $|\xi\rangle_i$ はサイト i 上の状態ベクトルで、 $\xi_i = +1$ のときは z 方向上向き、 $\xi_i = -1$ のときは下向きの状態を表す。一方、右辺は、初期状態が零磁場で NL 上の平衡状態のときの期待値である。

$$\langle Q(t) \rangle_{K_p,0} = \text{Tr} \rho(K_p, 0) Q(t) = \frac{\text{Tr} e^{K_p \sum \tau_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z} Q(t)}{\text{Tr} e^{K_p \sum \tau_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}}. \quad (3.31)$$

式 (3.29) の左辺は、ゲージ変換により

$$[\langle Q(t) \rangle_{F_z}]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{e^{K_p \sum \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{(2 \cosh K_p)^{N_B}} \langle \xi | Q(t) | \xi \rangle \quad (3.32)$$

と書き換えられ、さらに ξ について和を取り 2^N で割ると、

$$[\langle Q(t) \rangle_{F_z}]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{1}{2^N (2 \cosh K_p)^{N_B}} \text{Tr}_\xi e^{K_p \sum \tau_{ij} \xi_i \xi_j} \langle \xi | Q(t) | \xi \rangle \quad (3.33)$$

となる。状態ベクトルがゲージ変数に依存するのが、相関不等式の導出と異なる点である。上式右辺のトレースは、密度演算子 $\rho(K_p, 0)$ で書き表せる。横磁場が無い Ising 模型は、量子系と古典

系が等価になるので,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_\xi e^{K_p \sum \tau_{ij} \xi_i \xi_j} \langle \xi | Q(t) | \xi \rangle &= \text{Tr}_\xi \langle \xi | e^{K_p \sum \tau_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z} Q(t) | \xi \rangle \\
&= \text{Tr} e^{K_p \sum \tau_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z} Q(t) \\
&= \left(\text{Tr} e^{K_p \sum \tau_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z} \right) (\text{Tr} \rho(K_p, 0) Q(t)) \\
&= \left(\text{Tr}_\xi e^{K_p \sum \tau_{ij} \xi_i \xi_j} \right) (\text{Tr} \rho(K_p, 0) Q(t))
\end{aligned} \tag{3.34}$$

と計算できる. 従って,

$$[\langle Q(t) \rangle_{F_z}]_{K_p} = \sum_{\{\tau_{ij}\}} \frac{\text{Tr}_\xi e^{K_p \sum \tau_{ij} \xi_i \xi_j}}{2^N (2 \cosh K_p)^{N_B}} \text{Tr} \rho(K_p, 0) Q(t) \tag{3.35}$$

である. 最後に $\rho(K_p, 0) Q(t)$ のゲージ不変性を用いると, 式 (3.29) の右辺が上式と等しいことが示せる.

この恒等式 (3.29) は, ゲージ不変な演算子の期待値が, 強磁性極限と古典系における NL 上での平衡状態とで等しい事を意味している. この 2 つの状態の等価性は, 古典系の動的ゲージ理論によっても示されている [14]. ただし, 古典 Ising スピングラスは確率論的なダイナミクスであるのに対し, 量子系の絶対零度の時間発展は決定論的であるという違いがある.

3.2 量子ゲージグラス

この節では, ゲージ対称性をもつ他の量子スピングラスとして量子ゲージグラス (QGG) を考察する. 横磁場 Ising 模型と同様に, 相関不等式とゲージ不変な物理量に対する恒等式が得られるが, 後者は若干の修正が必要になる.

3.2.1 模型の定義

ゲージグラスの量子版を定義するために, 古典ゲージグラス (CGG) のハミルトニアン (2.30) を考える.

$$H_c = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\phi_i - \phi_j - \omega_{ij}). \tag{3.36}$$

このハミルトニアンはスピンベクトル $\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} S_i^x \\ S_i^y \end{pmatrix}$ と xy 面内の回転行列 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ を用いて

$$H_c = -J \sum_{\langle ij \rangle} {}^t \mathbf{S}_i R(\omega_{ij}) \mathbf{S}_j \tag{3.37}$$

と書き直すことができる. そこで, スピンベクトルの各成分を量子スピン演算子に置き換えることで量子化する. QGG のハミルトニアンを明示すると

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \left\{ \cos \omega_{ij} \left(\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y \right) - \sin \omega_{ij} \left(\sigma_i^x \sigma_j^y - \sigma_i^y \sigma_j^x \right) \right\} \tag{3.38}$$

である. 位相因子 $\omega_{ij} \in [0, 2\pi)$ は, CGG と同様に, コサイン型の確率分布 (2.31) に従うクエンチされた確率変数である.

ハミルトニアン (3.38) は、ランダムな Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用を含む XY 模型

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} (\boldsymbol{\sigma}_i \times \boldsymbol{\sigma}_j)_z \quad (3.39)$$

の特別な場合になっている。以下、太字の $\boldsymbol{\sigma}$ は、(3.37) の表記法に対応し x 成分と y 成分のみのベクトルとする。新たなパラメータとして

$$\tilde{J}_{ij} = \sqrt{J^2 + J_{ij}^2}, \quad \omega_{ij} = -\tan^{-1} \left(\frac{J_{ij}}{J} \right) \quad (3.40)$$

を定義すると、上のハミルトニアンは、

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} \tilde{J}_{ij} \left\{ \cos \omega_{ij} \left(\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y \right) - \sin \omega_{ij} \left(\sigma_i^x \sigma_j^y - \sigma_i^y \sigma_j^x \right) \right\} \quad (3.41)$$

と書ける。これは、相互作用の強度がボンドに依存していることを除けば、式 (3.38) に等しい。

3.2.2 量子ゲージグラスのゲージ変換

CGG におけるスピンのゲージ変換は、式 (2.32) で定義される。式 (3.37) と同じ表記法を使用すると、この変換は

$$U : \mathbf{S}_i \rightarrow R(-\psi_i) \mathbf{S}_i \quad (3.42)$$

と回転行列で表すことができる。そこで、QGG でのゲージ変換を上式の \mathbf{S}_i を $\boldsymbol{\sigma}_i$ で置き換えたもので定義する。これは Hilbert 空間内の回転演算子によって

$$U : \sigma_i^\alpha \rightarrow G \sigma_i^\alpha G^{-1} \quad G = \prod_i \exp \left(-i \frac{\psi_i}{2} \sigma_i^z \right) \quad (3.43)$$

と書ける。また、転置ベクトル ${}^t\boldsymbol{\sigma}_i$ の変換は、

$$U : {}^t\boldsymbol{\sigma}_i \rightarrow {}^t\boldsymbol{\sigma}_i R(\psi_i) = G {}^t\boldsymbol{\sigma}_i G^{-1} \quad (3.44)$$

となる。確率変数のゲージ変換は、古典系と全く同じで、

$$V : \omega_{ij} \rightarrow \omega_{ij} - \psi_i + \psi_j \quad (3.45)$$

と定義する。これらの変換 UV の元で、ハミルトニアンは不変である。

$$(UV)H = -J \sum_{\langle ij \rangle} {}^t\boldsymbol{\sigma}_i R(\psi_i) R(\omega_{ij} - \psi_i + \psi_j) R(-\psi_j) \boldsymbol{\sigma}_j = H. \quad (3.46)$$

ここで、回転行列の性質 $R(\psi)R(\phi) = R(\psi + \phi)$ を用いた。

3.2.3 相関関数

2.4 節で議論したように CGG では、指数関数 $e^{i(\phi_i - \phi_j)}$ で相関関数を定義すると、ゲージ理論を適用し易くなる。そこで、QGG ではどのような相関関数を考えると便利なのかを、まず考察する。

CGG で使用した指数関数型の相関関数を、(3.37) で使用したスピンベクトルの形で表すと、

$$\begin{aligned} e^{i(\phi_i - \phi_j)} &= \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - i (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j)_z \\ &= {}^t\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - i {}^t\mathbf{S}_i R(-\pi/2) \mathbf{S}_j \end{aligned} \quad (3.47)$$

と書ける。そこで、上式を元に、QGG の相関演算子を

$$\gamma_{ij} = (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y) - i(\sigma_i^x \sigma_j^y - \sigma_i^y \sigma_j^x) \quad (3.48)$$

と定義する。この演算子は、スピンのゲージ変換 U によって

$$\begin{aligned} U \gamma_{ij} &= G \gamma_{ij} G^{-1} \\ &= {}^t \sigma_i R(\psi_i - \psi_j) \sigma_j - i {}^t \sigma_i R(\psi_i - \psi_j - \pi/2) \sigma_j \\ &= \cos(\psi_i - \psi_j) {}^t \sigma_i \sigma_j - \sin(\psi_i - \psi_j) {}^t \sigma_i R(-\pi/2) \sigma_j \\ &\quad - i \cos(\psi_i - \psi_j - \pi/2) {}^t \sigma_i \sigma_j + i \sin(\psi_i - \psi_j - \pi/2) {}^t \sigma_i R(-\pi/2) \sigma_j \\ &= e^{-i(\psi_i - \psi_j)} \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (3.49)$$

と変換される。最初の因子は、指数関数の肩の負符号を除けば、CGG の相関関数と等しい。このように、変換後の形が2つの相関関数の積で表せるのが、この演算子を使用する利点である。

通常、XY 模型の様な系の相関関数は、古典系の $\cos(\phi_i - \phi_j)$ に対応する $\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y$ で定義する。しかし、ゲージ変換 U を作用させると、

$$\begin{aligned} U(\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y) &= {}^t \sigma_i R(\psi_i) R(-\psi_j) \sigma_j \\ &= \cos(\psi_i - \psi_j) (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y) - \sin(\psi_i - \psi_j) (\sigma_i^x \sigma_j^y - \sigma_i^y \sigma_j^x) \end{aligned} \quad (3.50)$$

となり、ゲージ変数とスピン演算子が分離しないため、この形はゲージ理論にとって不便である。一方、式 (3.48) の第二項は系の対称性のため平均を取ると消えるので、本質的に両者は同じである。従って、ゲージ理論を展開しやすい式 (3.48) の定義を用いる。

式 (3.49) の変換則より、式 (3.10) や式 (3.16)-(3.18) と同じ結果を得ることができる。相関演算子 γ_{kl} の期待値

$$[\langle \gamma_{kl} \rangle_K]_{K_p} = \int \prod_{\langle ij \rangle} d\omega_{ij} \frac{e^{K_p \omega_{ij}}}{2\pi I_0(K_p)} \frac{\text{Tr } \gamma_{kl} e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \quad (3.51)$$

を考える。被積分関数は ω_{ij} に対する周期性を持つので、 ω_{ij} の値をずらすだけのゲージ変換 V を作用させても、上式の値は変わらない。つまり、

$$[\langle \gamma_{kl} \rangle_K]_{K_p} = \int \prod_{\langle ij \rangle} d\omega_{ij} \frac{e^{K_p(\omega_{ij} - \psi_i + \psi_j)}}{2\pi I_0(K_p)} \frac{\text{Tr } \gamma_{kl} e^{-\beta \tilde{H}}}{\text{Tr } e^{-\beta \tilde{H}}} \quad (3.52)$$

を得る。さらにゲージ変換演算子 G はユニタリーであることと、式 (3.46), (3.49) を用いると

$$\begin{aligned} [\langle \gamma_{kl} \rangle_K]_{K_p} &= \int \prod_{\langle ij \rangle} d\omega_{ij} \frac{e^{K_p(\omega_{ij} - \psi_i + \psi_j)}}{2\pi I_0(K_p)} \frac{\text{Tr } G \gamma_{kl} G^{-1} G e^{-\beta \tilde{H}} G^{-1}}{\text{Tr } G e^{-\beta \tilde{H}} G^{-1}} \\ &= \int \prod_{\langle ij \rangle} d\omega_{ij} \frac{e^{K_p(\omega_{ij} - \psi_i + \psi_j)}}{2\pi I_0(K_p)} e^{-i(\psi_k - \psi_l)} \frac{\text{Tr } \gamma_{kl} e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

となる。上式はゲージ変数 ψ_i の値に依らないので、 ψ_i について 0 から 2π まで積分し 2π で割っても構わない。さらに、分母分子に CGG の NL 上での分配関数を掛けることによって、

$$[\langle \gamma_{kl} \rangle_K]_{K_p} = \int \prod_{\langle ij \rangle} \frac{d\omega_{ij}}{2\pi I_0(K_p)} \frac{\text{Tr}_\psi e^{K_p \sum_{ij} (\omega_{ij} - \psi_i + \psi_j)}}{(2\pi)^N} \left\langle e^{-i(\psi_k - \psi_l)} \right\rangle_{K_p}^c \langle \gamma_{kl} \rangle_K \quad (3.54)$$

を得る. ここで Tr_ψ は全ての ψ_i について 0 から 2π までの積分を, $\langle \cdots \rangle_K^c$ は CGG での熱平均を表す. 式 (3.14) の様にスピン演算子と共にゲージ変数 ψ_i も変換するような新たなゲージ変換

$$U' : \sigma_i^\alpha \rightarrow G \sigma_i^\alpha G^{-1}, \quad \psi_i \rightarrow \psi_i - \psi'_i, \quad G = \prod_i \exp \left(-i \frac{\psi'_i}{2} \sigma_i^z \right) \quad (3.55)$$

$$V' : \omega_{ij} \rightarrow \omega_{ij} - \psi'_i + \psi'_j$$

を (3.54) の右辺に適用すると,

$$[\langle \gamma_{kl} \rangle_K]_{K_p} = \left[\left\langle e^{-i(\psi_k - \psi_l)} \right\rangle_{K_p}^c \langle \gamma_{kl} \rangle_K \right]_{K_p} \quad (3.56)$$

が証明できる.

この恒等式の絶対値を取ることで,

$$|[\langle \gamma_{kl} \rangle_K]_{K_p}| \leq \left[\left\langle e^{-i(\psi_k - \psi_l)} \right\rangle_{K_p}^c \right]_{K_p} \quad (3.57)$$

となる. また, 同様にして

$$|[\text{sgn}(\langle \gamma_{kl} \rangle_K)]_{K_p}| \leq \left[\left\langle e^{-i(\psi_k - \psi_l)} \right\rangle_{K_p}^c \right]_{K_p}, \quad (3.58)$$

$$\left[\frac{\langle e^{i(\psi_k - \psi_l)} \rangle_{K_p}^c}{\langle \gamma_{kl} \rangle_K} \right]_{K_p} = \left[\frac{1}{\langle \gamma_{kl} \rangle_K} \right]_{K_p} \geq 1 \quad (3.59)$$

が得られる. これらの式の意味を次で議論する.

3.2.4 秩序変数

連続スピン系での最低臨界次元は 2 なので, $d > 2$ ならば低温かつ乱雑さが小さい領域で強磁性相が存在する. この場合, 2 点相関関数は, 2 つのスピンを十分離す極限で, 磁化の二乗になる.

$$[\langle \gamma_{kl} \rangle_K]_{K_p} \rightarrow m(K, K_p)^2, \quad |k - l| \rightarrow \infty. \quad (3.60)$$

一方, 不等式 (3.57) の右辺は, 二乗を考えることで

$$\begin{aligned} \left[\left\langle e^{-i(\psi_k - \psi_l)} \right\rangle_{K_p}^c \right]_{K_p}^2 &\leq \left[\left| \left\langle e^{-i(\psi_k - \psi_l)} \right\rangle_{K_p}^c \right|^2 \right]_{K_p} \\ &\rightarrow \left[\left| \left\langle e^{i\psi_k} \right\rangle_{K_p}^c \right|^2 \right]_{K_p} \left[\left| \left\langle e^{i\psi_l} \right\rangle_{K_p}^c \right|^2 \right]_{K_p} \quad (|k - l| \rightarrow \infty) \\ &= q^c(K_p, K_p)^2 = m^c(K_p, K_p)^2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

と評価できる. ここで, CGG の NL 上で成立する恒等式 $m = q$ を用いた. 従って, 不等式 (3.57) から,

$$m(K, K_p)^2 \leq m^c(K_p, K_p). \quad (3.62)$$

を得る. もしパラメータ K_p が古典系の多重臨界点での値 $K_{p_c}^c$ よりも小さいとすると, 右辺は 0 になるため, QGG の磁化も必ず 0 になる. つまり, QGG の強磁性相は, 領域 $K_p > K_{p_c}^c$ の中に無ければならない. これは, 量子効果によって長距離秩序が減少したと考えられる.

もし系の次元が2だとすると、 K と K_p が十分大きいとき、長距離秩序ではなく準長距離秩序が存在する。つまり、Kosterlitz-Thouless 相 (KT 相) が現れる。KT 相であるかどうかは、相関長 ξ が発散するか否かで判断できる。相関長を用いて不等式 (3.57) の両辺を評価すると、式 (3.60), (3.61) と同様にして、

$$\begin{aligned} [\langle \gamma_{kl} \rangle_K]_{K_p} &\sim e^{-r_{kl}/\xi_m(K, K_p)}, \\ \left[\left\langle \left\langle e^{-i(\psi_k - \psi_l)} \right\rangle_{K_p}^c \right\rangle_{K_p} \right]^2 &\leq \left[\left\langle \left| \left\langle e^{-i(\psi_k - \psi_l)} \right\rangle_{K_p}^c \right|^2 \right\rangle_{K_p} \right] \sim e^{-r_{kl}/\xi_m^c(K_p, K_p)} \end{aligned} \quad (3.63)$$

となる。よって、

$$\xi_m(K, K_p) \leq 2\xi_m^c(K_p, K_p) \quad (3.64)$$

を得る。従って、KT 相の存在領域も $K_p > K_p^c$ に制限される。

3.2.5 ゲージ不変な物理量

横磁場 Ising 模型と同じ様に、ゲージ不変な物理量に対する恒等式を QGG で証明することができる。ただし、若干の相異がある。QGG における強磁性極限での状態は、 $|F_x\rangle$ である。この状態は、ゲージ変換演算子によって

$$G|F_x\rangle = |\psi\rangle, \quad |\psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 \cdots |\psi\rangle_N \quad (3.65)$$

と変換される。 $|\psi\rangle_i$ は、 xy 面内で x 軸からの角が ψ_i の方向にスピンの向いている状態を表す。式 (3.29) と同様にして、QGG における恒等式

$$[\langle Q(t) \rangle_{F_x}]_{K_p} = [\langle Q(t) \rangle_{\rho_c(K_p)}]_{K_p} \quad (3.66)$$

を証明できる。

ここで、右辺に現れた $\rho_c(K_p)$ は通常の密度演算子とは異なる。この密度演算子は、CGG の Boltzmann 因子を用いて、

$$\rho_c(K_p) = \frac{\text{Tr}_\psi e^{K_p \sum_{ij} \cos(\omega_{ij} - \psi_i + \psi_j)} |\psi\rangle \langle \psi|}{\text{Tr}_\psi e^{K_p \sum_{ij} \cos(\omega_{ij} - \psi_i + \psi_j)}} \quad (3.67)$$

と定義される。状態ベクトル $|\psi\rangle$ は、QGG のハミルトニアンを対角化していないので、 $\rho_c(K_p)$ は平衡状態の密度演算子とは等しくない。

恒等式 (3.29) の導出を思い出すと、横磁場 Ising 模型が特別な場合であることが分かる。横磁場がない場合、ハミルトニアン (3.1) は z 方向のスピン演算子 σ_i^z と可換なので、この模型は古典 Ising スピングラスと等価である。そのため、恒等式 (3.29) の右辺の期待値を、平衡状態の密度行列で表すことができる。

4 スピングラス模型の Griffiths 不等式

前章まで量子スピングラス模型のゲージ理論について議論してきたが、この章では、話ががらりと変わり、相互作用が Gauss 分布に従う古典 Ising スピングラス、所謂 Gauss 模型を考える。Gauss 分布の性質とゲージ理論を組み合わせることにより、NL に沿って相関関数が、非負かつ単調であることを証明する。この結果から、自由エネルギーと相関関数の熱力学的極限の存在が導かれる。さらに、様々な格子における多重臨界点の位置の関係を議論する。これらの結果は、強磁性体模型で証明されている Griffiths 不等式をスピングラスへ拡張したものになっている。

4.1 強磁性体模型の Griffiths 不等式

強磁性体模型において, Griffiths[16] は 2 つの不等式を証明し, Kelly と Sherman[17] がこれを一般化した. この 2 つの不等式は Griffiths 不等式, または 3 人の頭文字を取って GKS 不等式と呼ばれる. Griffiths 不等式は, 強磁性 Ising 模型の相転移について, 重要な見識を与える [18]. 彼らの不等式は, Ising スピンの集合 $S_A = \prod_{i \in A} S_i$ がエネルギー $-J_A S_A$ で強磁性的に結合しているとき, 自由エネルギー F と全ての相関関数が, どこの相互作用の大きさに対しても単調関数であることを意味している. 式で表すと,

$$-\frac{d}{dJ_B} F = \langle S_B \rangle \geq 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dJ_B} \langle S_C \rangle \geq 0 \quad (4.2)$$

である. この証明は, 付録 A で示す. これらの不等式は, 幾つかの境界条件の下で, 自由エネルギーと相関関数が熱力学的極限を持つことを証明したり, 種々の格子で相転移が存在することを示したりするのに使用される.

不等式 (4.1) と (4.2) の証明には, 全ての相互作用が強磁性的, つまり $J_A \geq 0$ という条件を仮定している. そのため, 強磁性相互作用と反強磁性相互作用を共に含むスピングラス模型では, 明らかに証明が破綻してしまう.

4.2 Gauss 模型の Griffiths 不等式

強磁性体模型での証明が適用できないため, スピングラスの Griffiths 不等式は, 別の手法で証明しなくてはならない. そこで, これまで議論してきたゲージ理論と, この節の 3 番目の小節で示す Gauss 分布の性質を用いることにより, 不等式を証明する. より一般的にするため, 多体の相互作用を含んだ Gauss 模型を扱うことにする.

4.2.1 Gauss 模型の一般化

格子 \mathcal{L} の部分集合である有限の箱 Ω を考える. 各格子点 $i \in \Omega$ に Ising スピン ($S_i = \pm 1$) を配置し, 部分集合 $A \subset \Omega$ 内にあるスピンの積を

$$S_A = \prod_{i \in A} S_i \quad (4.3)$$

と表す. 多体の相互作用を持つスピングラス模型のハミルトニアンは,

$$H = - \sum_{A \subset \Omega} J_A S_A \quad (4.4)$$

と定義される. 和は, 相互作用が存在する部分集合について取る. もし, 相互作用する部分集合を 2 スピン間のボンドに限定すると, この模型は EA 模型になる. Gauss 模型の場合, J_A は平均 J_0 , 分散 σ のガウス分布 (2.4) に従うクエンチされた確率変数である. この模型の NL は, 式 (2.16) で定義される. 今, NL に沿って系を変化させたときの振舞いを見たいので, NL の条件を新たな無次元のパラメータ x を用いて

$$\beta = \frac{x}{\sigma}, \quad J_0 = \sigma x \quad (4.5)$$

と書き表すと便利である. x の値を一つ決めると, NL 上の点が一つ定まる.

Gauss 模型の Griffiths 不等式を NL 上で証明するためには、もう一工夫必要である。式 (4.1), (4.2) から明らかなように、Griffiths 不等式は、ある場所の相互作用を独立に変化させることを考えなければならない。Gauss 模型の NL 上では、相互作用を特徴づけるのはパラメータ x なので、パラメータ x が各部分集合ごとに独立に変化できるようにしたい。そうするためには、逆温度 β , 平均 J_0 , 分散 σ も部分集合ごとに異なる値を取れるようにしなければならない。しかし、一つ問題がある。温度が局所的に異なる状況を考える必要があるので、ハミルトニアンによって模型を定義することができなくなる。そのため、ハミルトニアンではなくランダムポテンシャル (Boltzmann 因子の肩)

$$U_\Omega = \sum_{A \subset \Omega} \beta_A J_A S_A \quad (4.6)$$

によって模型を定義する。 $\beta_A \geq 0$ は部分集合 A の局所温度の逆数であり、 J_A がクエンチされた確率変数で、平均 $[J_A] = J_{A0}$, 分散 $[(J_A - J_{A0})^2] = \sigma_A^2$ の Gauss 分布に従う。NL の条件は、各部分集合ごとにパラメータ x_A を用いて

$$\beta_A = \frac{x_A}{\sigma_A}, \quad J_{A0} = \sigma_A x_A \quad (4.7)$$

と表す。全ての部分集合 A において、 x_A は非負である。正確には、上の条件を満たす領域は、線ではなく多様体なのだが、簡単のため以降も NL と表記する。

以上の設定のもとで、自由エネルギーに相当する関数として

$$P = [\log \text{Tr } e^{U_\Omega}] \quad (4.8)$$

を定義する。この関数から、全ての物理量を導出することができる。数理物理学では、格子気体模型の大分配関数との類推より、圧力関数と呼ばれている。もし、局所温度が一樣ならば、圧力関数は自由エネルギーに比例する。

$$P = -\beta F. \quad (4.9)$$

また、相関関数はランダムポテンシャルを用いて

$$[\langle S_C \rangle] = \left[\frac{\text{Tr } S_C e^{U_\Omega}}{\text{Tr } e^{U_\Omega}} \right] \quad (4.10)$$

と表せる。一般に、圧力関数と相関関数は $\{\beta_A\}$ と $\{J_{A0}\}$ の関数だが、NL 上に限定すると $\{x_A\}$ の関数である。

4.2.2 結果

このように一般化された Gauss 模型の NL 上において、様々な厳密な結果を得ることができる。Griffiths 不等式に相当するのは、次の 2 つの不等式である。

$$\frac{dP}{dx_B} = x_B [\langle S_B + 1 \rangle] \geq 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dx_B} [\langle S_C \rangle] = 2x_B [\langle S_B S_C \rangle - \langle S_B \rangle \langle S_C \rangle] \geq 0. \quad (4.12)$$

どちらの不等式も、NL の条件 (4.7) を満たす限り、任意の部分集合 B, C で成立する。同様の方法で、次式が一般に示せる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_B} [\langle S_C \rangle^{2k-1}] &= \frac{d}{dx_B} [\langle S_C \rangle^{2k}] \\ &= 2k(2k-1)x_B [\langle S_B \rangle^{2k-2} (\langle S_B S_C \rangle - \langle S_B \rangle \langle S_C \rangle)^2] \geq 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

また、関連する不等式として、相関関数の下限

$$[\langle S_B \rangle] \geq \begin{cases} \frac{x_B^2}{1+x_B^2} & (\text{部分集合 } B \text{ に相互作用がある場合}) \\ 0 & (\text{部分集合 } B \text{ に相互作用がない場合}) \end{cases} \quad (4.14)$$

を得ることができる。不等式 (4.12) と (4.14) を用いることで、圧力関数の凹性を直ちに証明できる。すなわち、圧力関数の 2 階微分が、式 (4.11) の微分より

$$\frac{d^2 P}{dx_B dx_C} = \begin{cases} x_B \frac{d}{dx_C} [\langle S_B \rangle] \geq 0 & (B \neq C) \\ [\langle S_B \rangle] + 1 + x_B \frac{d}{dx_B} [\langle S_B \rangle] \geq 0 & (B = C) \end{cases} \quad (4.15)$$

と常に正であることが示せる。

4.2.3 Gauss 分布の性質

上で示した不等式を証明するために、ゲージ理論のほかに Gauss 分布の性質を利用する。ここでは、Gauss 分布の性質から 2 つの有用な関係式を導出する。

Gauss 分布

$$P_A(J_A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2}} \exp\left(-\frac{(J_A - J_{A0})^2}{2\sigma_A^2}\right) \quad (4.16)$$

の性質として、次の 3 つの性質を利用する。

1. $J_A - J_{A0}$ の関数であること
2. 微分がそれ自身に比例し、比例係数が J_A の一次式であること
3. $|J_A| \rightarrow \infty$ で急速に減衰すること

これらの性質から、任意の物理量 O に対する恒等式

$$[J_B O] = J_{B0} [O] + \sigma_B^2 \left[\frac{\partial O}{\partial J_B} \right], \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial J_{B0}} [O] = \left[\frac{\partial O}{\partial J_B} \right] \quad (4.18)$$

を導くことができる。どちらの式も、NL の条件とは無関係で、全てのパラメータ空間で成立する。

確率変数は独立なので、確率変数が一つの場合において上式を証明すれば十分である。そこで、次の量を考える。

$$\left[\frac{\partial}{\partial J} O(J) \right] = \int dJ P(J) \frac{\partial}{\partial J} O(J). \quad (4.19)$$

ここで、 $O(J)$ は、Gauss 変数 J の関数である。Gauss 分布は $|J| \rightarrow \infty$ で急速に減衰するので、右辺を部分積分で書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial J} O(J) \right] &= \int dJ P(J) \frac{\partial}{\partial J} O(J) \\ &= \int dJ \left(-\frac{\partial}{\partial J} P(J) \right) O(J). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Gauss 分布の微分は,

$$\frac{\partial}{\partial J} P(J) = \frac{J_0 - J}{\sigma^2} P(J) \quad (4.21)$$

と計算できるので,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial J} O(\{J\}) \right] &= \int dJ P(J) \frac{J - J_0}{\sigma^2} O(J) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \{ [J O(J)] - J_0 [O(J)] \} \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる. これが, 式 (4.17) である.

式 (4.18) を証明するには, Gauss 分布が $J - J_0$ の関数であることより,

$$\frac{\partial}{\partial J} P(J) = -\frac{\partial}{\partial J_0} P(J) \quad (4.23)$$

を利用する. この式を, 式 (4.20) に代入することで,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial J} O(J) \right] &= \int dJ \left(\frac{\partial}{\partial J_0} P(J) \right) O(J) \\ &= \frac{\partial}{\partial J_0} \int dJ P(J) O(J) \\ &= \frac{\partial}{\partial J_0} [O(J)] \end{aligned} \quad (4.24)$$

を得る.

4.2.4 証明

第 1 不等式の証明

第 1 Griffiths 不等式 (4.11) から証明する. 圧力関数 P は, Boltzmann 因子と Gauss 分布を通してパラメータ $\{x_A\}$ に依存している. つまり, 元々は逆温度 $\{\beta_A\}$ だったところと確率分布の平均 $\{J_{A0}\}$ だったところにパラメータが入っている. それぞれの依存性を別々に扱った方が見通しが良いので, 次のようにパラメータ x_B の微分を

$$\frac{dP}{dx_B} = \frac{d\beta_B}{dx_B} \frac{\partial P}{\partial \beta_B} \Big|_{\text{NL}} + \frac{dJ_{B0}}{dx_B} \frac{\partial P}{\partial J_{B0}} \Big|_{\text{NL}} = \frac{1}{\sigma_B} \frac{\partial P}{\partial \beta_B} \Big|_{\text{NL}} + \sigma_B \frac{\partial P}{\partial J_{B0}} \Big|_{\text{NL}} \quad (4.25)$$

と 2 つに分けて各項を計算する. 第 2 項は恒等式 (4.18) より,

$$\frac{\partial P}{\partial J_{B0}} = \left[\frac{\partial}{\partial J_B} \log \text{Tr } e^{U_\Omega} \right] = \left[\frac{\text{Tr } \beta_B S_B e^{U_\Omega}}{\text{Tr } e^{U_\Omega}} \right] = \beta_B [\langle S_B \rangle] \quad (4.26)$$

となり. 第 1 項は直接計算より,

$$\frac{\partial P}{\partial \beta_B} = \left[\frac{\text{Tr } J_B S_B e^{U_\Omega}}{\text{Tr } e^{U_\Omega}} \right] = [\langle J_B S_B \rangle] \quad (4.27)$$

となる. ゲージ理論より NL 上の厳密な局所エネルギーが式 (2.28) のように計算できて,

$$[\langle J_B S_B \rangle] = J_{B0} = \sigma_B x_B \quad (4.28)$$

となる. 式 (4.25)-(4.28) より, 直ちに (4.11) を得る.

第2 不等式の証明

2 番目の Griffiths 不等式 (4.12) の証明も、同様に実行できる。式 (4.25) のように、パラメータ x_B の微分は、

$$\frac{d}{dx_B}[\langle S_C \rangle] = \frac{1}{\sigma_B} \frac{\partial}{\partial \beta_B} [\langle S_C \rangle] \Big|_{\text{NL}} + \sigma_B \frac{\partial}{\partial J_{B0}} [\langle S_C \rangle] \Big|_{\text{NL}} \quad (4.29)$$

と書ける。 β_B の微分は、簡単に計算できて、

$$\frac{\partial}{\partial \beta_B} [\langle S_C \rangle] = [J_B \langle S_B S_C \rangle] - [J_B \langle S_B \rangle \langle S_C \rangle] \quad (4.30)$$

となる。恒等式 (4.17) を上式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_B} \frac{\partial}{\partial \beta_B} [\langle S_C \rangle] &= \frac{J_{B0}}{\sigma_B} [\langle S_B S_C \rangle - \langle S_B \rangle \langle S_C \rangle] \\ &\quad - 2\sigma_B \beta_B [\langle S_B \rangle \langle S_B S_C \rangle - \langle S_B \rangle^2 \langle S_C \rangle] \end{aligned} \quad (4.31)$$

を得る。また、恒等式 (4.18) より J_{B0} の微分は、

$$\sigma_B \frac{\partial}{\partial J_{B0}} [\langle S_C \rangle] = \sigma_B \beta_B [\langle S_B S_C \rangle - \langle S_B \rangle \langle S_C \rangle] \quad (4.32)$$

と計算できる。これらを、(4.29) に戻せば、

$$\frac{d}{dx_B} [\langle S_C \rangle] = 2x_B [\langle S_B S_C \rangle - \langle S_B \rangle \langle S_C \rangle - \langle S_B \rangle \langle S_B S_C \rangle + \langle S_B \rangle^2 \langle S_C \rangle] \quad (4.33)$$

となる。

最後にゲージ理論の結果を用いる。NL 上で成立する恒等式 $m = q(2.17)$ と同様にして、以下の恒等式が NL 上で証明できる。

$$\begin{aligned} [\langle S_B S_C \rangle] &= [\langle S_B S_C \rangle^2] \\ [\langle S_B \rangle \langle S_C \rangle] &= [\langle S_B \rangle \langle S_B S_C \rangle] = [\langle S_B \rangle \langle S_C \rangle \langle S_B S_C \rangle] \\ [\langle S_B \rangle^2 \langle S_C \rangle] &= [\langle S_B \rangle^2 \langle S_C \rangle^2] \end{aligned} \quad (4.34)$$

これらを、式 (4.33) に代入すると、配位平均の中身が二乗の形で書け、不等式

$$\frac{d}{dx_B} [\langle S_C \rangle] = 2x_B [(\langle S_B S_C \rangle - \langle S_B \rangle \langle S_C \rangle)^2] \geq 0 \quad (4.35)$$

を得る。

不等式 (4.12) の直接の結果は、秩序変数を含む全ての n 点相関関数が、どの部分集合のパラメータ x に対し単調増加関数であることである。特に、2 点相関関数が単調増加なので、当然の結果として、相関長も x と共に増加する。

相関関数の下限

部分集合 B に相互作用が存在する場合、不等式 (4.14) を証明するには、局所エネルギーを

$$[\langle J_B S_B \rangle] = \int \prod_{A \in \Omega} dJ_A \left(\sqrt{P_A(J_A)} J_B \right) \left(\sqrt{P_A(J_A)} \langle S_B \rangle \right) \quad (4.36)$$

と表しておく和良好的。両辺を二乗し、Cauchy-Schwarz の不等式を用いると

$$[\langle J_B S_B \rangle]^2 \leq (\sigma_B^2 + J_{B0}^2) [\langle S_B \rangle^2] \quad (4.37)$$

となる。ゲージ理論より NL 上で

$$[\langle S_B \rangle] = [\langle S_B \rangle^2] \quad (4.38)$$

と局所エネルギーの厳密解 (4.28) が成立するので不等式 (4.14) を得る。相互作用がない場合は、恒等式 (4.38) より自明である。

この不等式は、相関関数が、非負で、部分集合のパラメータが無限大になると 1 に近付くことを意味している。これは、妥当な結果である。パラメータ x_B が大きいということは、相互作用がほぼ強磁性的で、局所温度が絶対零度に近い。従って、部分集合 B 内のスピンは、向きが揃うはずである。

相関関数の下限 (4.14) の証明において、Gauss 分布であることは本質的でない。一般的に、部分集合に相互作用がある場合、NL 上の相関関数の下限は、

$$[\langle S_B \rangle] \geq \frac{[J_B]^2}{[J_B^2]} \quad (4.39)$$

と表せる。相互作用がない場合は、 $[\langle S_B \rangle] \geq 0$ である。

4.3 不等式の応用

2つの Griffiths 不等式は、圧力関数 (自由エネルギー) と相関関数が単調な関数であることを意味している。この単調性によって、熱力学的極限の存在が比較的簡単に証明することができる。また、種々の格子での多重臨界点の位置についても同様に議論できる。

4.3.1 熱力学的極限の存在

熱力学的極限の存在を示すために、NL での Boltzmann 因子が

$$e^{\sum_{A \subset \Omega} x_A j_A S_A} \quad (4.40)$$

と書けることに注目する。ここで、 $j_A = J_A/\sigma_A$ は平均が $[j_A] = x_A \geq 0$ で分散が $[(j_A - x_A)^2] = 1$ の Gauss 変数である。これを用いると、圧力関数と相関関数が、

$$P = [\log \text{Tr } e^{\sum_{A \subset \Omega} x_A j_A S_A}], \quad (4.41)$$

$$[\langle S_C \rangle] = \left[\frac{\text{Tr } S_C e^{\sum_{A \subset \Omega} x_A j_A S_A}}{\text{Tr } e^{\sum_{A \subset \Omega} x_A j_A S_A}} \right] \quad (4.42)$$

となり、どちらも x だけに依存する関数である。

このように表記すると、部分集合 A の相互作用は x_A だけで制御されていることが分かる。もし $x_A = 0$ ならば、部分集合 A には相互作用がないので、0 からある正の値まで x_A を増加させるというのは、相互作用を付け加えている事に等しい。従って、不等式 (4.11) と (4.12) より、相互作用を新たに加えることで圧力関数と相関関数は増加する。

この結果は、自由境界条件の下で相関関数が熱力学的極限を持つことの証明に利用することができる。2つの有限集合 $\Omega' \subset \Omega$ を考える。集合 Ω は、集合 Ω' に相互作用を付加することで得られるので、前の議論より、

$$[\langle S_B \rangle]_{\Omega'}^{(\text{free})} \leq [\langle S_B \rangle]_{\Omega}^{(\text{free})} \quad (4.43)$$

である。つまり、相関関数は系の大きさに対し単調増加する。相関関数は上限 1 なので、 Ω の大きさが無限大の極限で必ず唯一の極限を持つ。従って、NL 上で相関関数の熱力学的極限は存在する。

系の大きさに対する相関関数の単調性は、固定境界条件においても示すことができる。境界上のサイト $i \in \partial\Omega$ のスピンを全て上向きとする固定境界条件は、 Ω の外側にあるサイトに非常に強い磁場を加えることで表現できる。これは、 $A = \{i\}, i \in \partial\Omega$ において $x_A \rightarrow \infty$ とするのと等価である。従って、集合 $\Omega \cap \Omega'$ は、 Ω' からサイト $i \in \Omega \setminus \Omega'$ の磁場を取り除くことで得られる。つまり、不等式 (4.12) より

$$[\langle S_B \rangle]_{\Omega'}^{(\text{fix})} \geq [\langle S_B \rangle]_{\Omega}^{(\text{fix})} \quad (4.44)$$

である。固定境界条件は、磁場に相当するパラメータ x を減少させることで系を大きくすることになるので、自由境界条件とは不等号の向きが異なる。相関関数の下限は不等式 (4.14) で与えられるので、 $\Omega \nearrow \mathcal{L}$ の極限が必ず存在する。 $[\langle S_B \rangle]^{(\text{fix})}$ と $[\langle S_B \rangle]^{(\text{free})}$ の熱力学的極限が一致する必要は無いが、前者の方が必ず大きい。

圧力関数の熱力学的極限も同様に議論できるが、その前に、自由境界条件における圧力関数の上限と下限を求める必要がある。これらは、補間法とよばれる手法で Griffiths 不等式より評価することができる。なお、今後の議論を簡単にするために、全ての部分集合のパラメータが同じ値 x であるとする。

まず始めに、 S_1 と S_2 だけの 2 スピン系を考える。式 (4.41) より、圧力関数はパラメータ x_{12} だけで決まる。そこで、2 つのスピンの $x_{12} = t$ で相互作用をしているときの圧力関数を $P(t)$ とすると、

$$P(x) - P(0) = \int_0^x \frac{dP(t)}{dt} dt = \int_0^x t ([\langle S_1 S_2 \rangle]_t + 1) dt \quad (4.45)$$

と書ける。最後の等号は、式 (4.11) を代入することで得られる。不等式 (4.14) より、相関関数は

$$\frac{t^2}{1+t^2} \leq [\langle S_1 S_2 \rangle]_t \leq 1 \quad (4.46)$$

を満たすので、

$$x^2 - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \leq P(x) - P(0) \leq x^2 \quad (4.47)$$

を得る。

全く同様に、系に新たな相互作用を 1 つ付け加えたときの圧力関数の増加分は、

$$x^2 - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \leq \Delta P \leq x^2 \quad (4.48)$$

と評価できる。もし、系に N_s 個の相互作用する部分集合があるならば、上式を N_s 回足し合わせれば良い。さらに、スピンの数を N とすると、直接計算によって $P(0) = N \log 2$ であることが分かる。最終的に、圧力関数の範囲として

$$x^2 - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + \frac{N}{N_s} \log 2 \leq \frac{P}{N_s} \leq x^2 + \frac{N}{N_s} \log 2 \quad (4.49)$$

を得る。

圧力関数がある界であることが分かったので、第 1 Griffiths 不等式 (4.11) より圧力関数の熱力学的極限の存在は、簡単に証明することができる。相関関数と同じ様に、自由境界条件での圧力関数は系の大きさに対し単調に増加する。また、上で示した不等式より、相互作用する部分集合当たりの圧力関数は、有界である。従って、自由境界条件の下で圧力関数の熱力学的極限が必ず存在する。

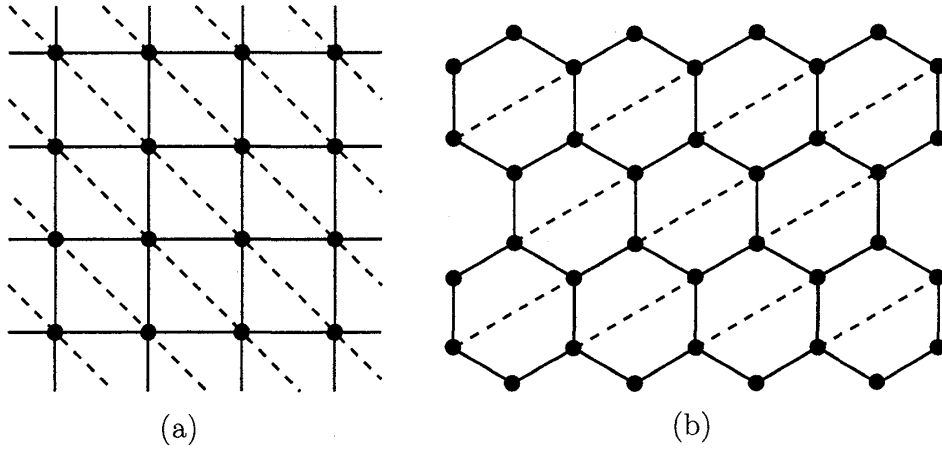


図 3: (a) 三角格子と正方格子の関係. 前者は後者に破線のボンドを付け加えることで得られる.
(b) 正方格子と六角格子の関係.

4.3.2 多重臨界点の位置

NL 上にあるとされる多重臨界点の位置を, 第 2 Griffiths 不等式によって議論することができる. Kitatani[19] は Schwarz の不等式を用いて $\pm J$ 模型について同様の結果を得ているが, 我々の議論の方がより簡潔である.

例として, 3つの2次元格子, 三角格子 (TR), 正方格子 (SQ), 六角格子 (HEX) を考える. 三角格子は正方格子から, 正方格子は六角格子から相互作用を付け加えることで得ることができる. (図 3) 前の議論から相互作用の付加によって相関は増加するので, 3つの格子の磁化は,

$$[\langle S_i \rangle]_{\text{TR}} \geq [\langle S_i \rangle]_{\text{SQ}} \geq [\langle S_i \rangle]_{\text{HEX}} \quad (4.50)$$

を満たす. 多重臨界点の温度は,

$$T_c = \sup\{T; [\langle S_i \rangle] > 0\} \quad (4.51)$$

で定義される. もし, 正方格子の転移温度が三角格子よりも高いとすると, $[\langle S_i \rangle]_{\text{TR}} = 0$, $[\langle S_i \rangle]_{\text{SQ}} > 0$ となる温度領域が存在するので, 上の不等式に矛盾する. 従って, 必ず

$$T_c^{\text{TR}} \geq T_c^{\text{SQ}} \geq T_c^{\text{HEX}} \quad (4.52)$$

となる.

同様にして, 単純立方格子 (SC) は正方格子に相互作用を追加することによって得られるので (図 4), 単純立方格子の多重臨界点の温度が, 正方格子よりも高い. つまり,

$$T_c^{\text{SC}} \geq T_c^{\text{SQ}} \quad (4.53)$$

となる.

5 まとめ

本論文では, ゲージ対称性を持つ様々なスピングラス模型について解析的な研究を行った. この章では, 我々が得た結果を簡潔にまとめる.

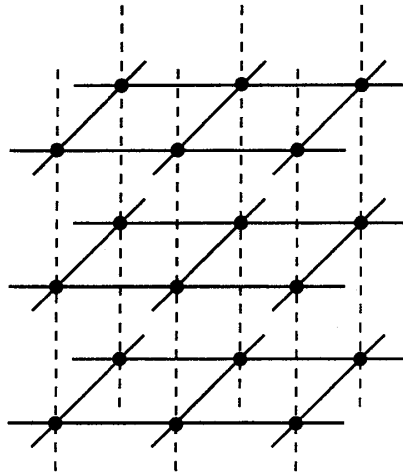


図 4: 単純立方格子と正方格子の関係. 前者は, 多層に積み重ねた正方格子に破線で示した垂直なボンドを加えることで得られる.

第1に, 2つの量子スピングラス, 横磁場 Ising 模型と量子ゲージグラスに対しゲージ理論を展開した. ゲージ理論を構成するために, スピンに対するゲージ変換を Hilbert 空間内の回転演算子によって定義した. このような定義が上手く行くためには, 相互作用がスピン演算子の1成分あるいは2成分で書けるというのが, 本質的である. もし, 系が Heisenberg 型の相互作用を持つ場合には, スピン演算子の交換関係を満足するようなゲージ変換を定義することができない.

量子スピングラスにゲージ理論を適用することにより, 我々は主に2つの結果を得た. 1つは, 相関不等式である. この不等式は, 量子系の相関関数が古典系の NL 上のものを決して越えることがない事を意味している. 対応する古典系は, ゲージ変換後の確率分布の形によって決まる. 不等式の結果として, 量子系の秩序変数の二乗は, 古典系の NL 上のものよりも小さいことが分かる. 従って, 強磁性相 (または KT 相) は, 対応する古典系の (準) 秩序相より内側に存在しなければならない. これは, 量子効果によって秩序が破壊されたと考えられ, 自然な結果である.

もう1つの結果は, ゲージ不変な物理量に対する恒等式である. 強磁性極限と NL 上の古典平衡状態は, ゲージ不変な演算子の期待値が等しくなる. Schrödinger 方程式による時間発展を導入しても, この結果は成立する. 古典スピングラスでは2つの状態の等価性は既に指摘されており, 我々の結果はその量子系への一般化になっている.

第2に, 古典 Gauss 模型の NL 上で Griffiths 不等式が成立することを第3章で証明した. 不等式の証明には, ゲージ対称性と共に Gauss 分布の性質が重要であった. これらの不等式は, 圧力関数 (自由エネルギー) と相関関数が, パラメータ x の単調増加関数であることを意味する. これらの物理量が有界であることより, 熱力学的極限の存在を証明することができた. さらに, 様々な格子における多重臨界点の位置の関係を議論した. 相互作用の追加により秩序変数が増加するので, 相互作用が多い格子の方が多重臨界点の温度が高い.

我々の証明では, NL 上である事と確率分布が Gauss 分布である事を最大限利用していた. そのため, $\pm J$ 模型などの他の模型への拡張や, NL 以外の領域での解析手法の開発が今後の課題として残っている.

A 強磁性体模型における Griffiths 不等式の証明

ここでは、強磁性体模型の Griffiths 不等式を証明する。

N 個のサイトを持つ有限系 Ω を考え、各サイトに Ising スピン ($S_i = \pm 1$) を配置する。強磁性体模型は、ハミルトニアン

$$H = - \sum_{A \subset \Omega} J_A S_A \quad (\text{全ての } A \subset \Omega \text{ に対し } J_A \geq 0) \quad (\text{A.1})$$

で定義される。そこで、 S_A は部分集合 A に含まれるスピンの積、つまり $S_A = \prod_{i \in A} S_i$ である。Griffiths 不等式は、全ての $B, C \subset \Omega$ に対し、

$$\langle S_B \rangle = \frac{\text{Tr}_S S_B \exp(-\beta H)}{\text{Tr}_S \exp(-\beta H)} \geq 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{d}{dJ_B} \langle S_C \rangle = \langle S_B S_C \rangle - \langle S_B \rangle \langle S_C \rangle \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

が成立することを意味する。

これらの証明に入る前に、対称差

$$BC \equiv B \cup C - B \cap C = (B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C) \quad (\text{A.4})$$

によって2つの部分集合の積を定義する。この積は、交換可能である。Ising スピンの二乗は1なので、スピンの積は対称差を用いて

$$S_B S_C = S_{BC} \quad (\text{A.5})$$

と表せる。

第1不等式 (A.2) を証明するために、指数関数の Maclaurin 展開を用いる。分配関数 $Z = \text{Tr}_S \exp(-\beta H)$ は常に正なので、 $Z \langle S_B \rangle$ が非負であることを示せば十分である。Boltzmann 因子をべき級数で展開することにより、

$$\begin{aligned} Z \langle S_B \rangle &= \text{Tr}_S S_B \exp \left(\beta \sum_{A \subset \Omega} J_A S_A \right) \\ &= \text{Tr}_S \left(S_B + \beta \sum_A J_A S_{AB} + \frac{\beta^2}{2} \sum_{AA'} J_A J_{A'} S_{AA'B} + \cdots \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

を得る。ここで、Ising スピンのトレースが、

$$\text{Tr}_S S_A = \begin{cases} 0 & (A \neq \emptyset) \\ 2^N & (A = \emptyset) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

となることに注目する。任意の $A \subset \Omega$ に対し $J_A \geq 0$ であれば、式 (A.6) のトレースを取ったとき、どの項も非負になる。従って、第1 Griffiths 不等式 (A.2) を得る。

第2 Griffiths 不等式 (A.2) を証明するためには、次の量が非負であることを示せば良い。

$$\begin{aligned}
 W &= Z^2 (\langle S_B S_C \rangle - \langle S_B \rangle \langle S_C \rangle) \\
 &= \text{Tr}_S \exp \left(\beta \sum_{A \in \Omega} J_A S_A \right) \text{Tr}_{S'} S'_{BC} \exp \left(\beta \sum_{A \in \Omega} J_A S'_A \right) \\
 &\quad - \text{Tr}_S S_B \exp \left(\beta \sum_{A \in \Omega} J_A S_A \right) \text{Tr}_{S'} S'_C \exp \left(\beta \sum_{A \in \Omega} J_A S'_A \right) \\
 &= \text{Tr}_S \text{Tr}_{S'} (S'_{BC} - S_B S'_C) \exp \left(\beta \sum_{A \in \Omega} J_A (S_A + S'_A) \right) \\
 &= \text{Tr}_S \text{Tr}_{S'} (1 - S_B S'_B) S'_{BC} \exp \left(\beta \sum_{A \in \Omega} J_A (S_A S'_A + 1) S'_A \right).
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

ここで、 $\{S'_i\}$ を固定したとすると、 S_i で和を取っても $\sigma_i \equiv S_i S'_i$ で取っても同じである。従って、

$$\begin{aligned}
 W &= \text{Tr}_\sigma \text{Tr}_{S'} (1 - \sigma_B) S'_{BC} \exp \left(\beta \sum_{A \in \Omega} J_A (\sigma_A + 1) S'_A \right) \\
 &= \text{Tr}_\sigma (1 - \sigma_B) \left\{ \text{Tr}_{S'} S'_{BC} \exp \left(\beta \sum_{A \in \Omega} J_A (\sigma_A + 1) S'_A \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

となる。今度は $\{\sigma_i\}$ を固定して考えると、最後の括弧の中身は、相互作用

$$J'_A = J_A (\sigma_A + 1) \geq 0 \tag{A.10}$$

を持つ新たな強磁性体模型の $Z' \langle S'_{BC} \rangle'$ になっている。第1 Griffiths 不等式 (A.2) より

$$W = \text{Tr}_\sigma (1 - \sigma_B) Z' \langle S'_{BC} \rangle' \geq 0 \tag{A.11}$$

なので、第2 Griffiths 不等式 (A.3) が証明された。

参考文献

- [1] K. Binder and A. P. Young, *Rev. Mod. Phys.*, **58** (1986) 801.
- [2] S. F. Edwards and P. W. Anderson, *J. Phys. F*, **5** (1975) 965.
- [3] D. Sherrington and S. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975) 1972.
- [4] J. R. de Almeida and D. J. Thouless, *J. Phys. A*, **11** (1978) 983.
- [5] G. Parisi, *Phys. Lett.*, **73A** (1979) 203; *J. Phys. A*, **13** (1980) 1011, 1887 and L115.
- [6] H. Nishimori, *Prog. Theor. Phys.*, **66** (1981) 1169.
- [7] H. Nishimori, *Statistical Physics on Spin Glasses and Information Processing: An Introduction*, (Oxford: Oxford University Press) (2001)
- [8] H. Kitatani, *J. Phys. Soc. Jpn*, **61** (1992) 4049.

- [9] Y. Ozeki and H. Nishimori, *J. Phys. A*, **26** (1993) 3399.
- [10] P. Contucci and S. Graffi, *J. Stat. Phys.*, **115** (2004) 581.
- [11] A. Georges, D. Hansel, P. Le Doussal and J. P. Bouchaud, *J. Physique*, **46** (1985) 1827.
- [12] P. Le Doussal and A. B. Harris, *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) 625.
- [13] E. Granato and J. M. Kosterlitz, *Phys. Rev. B*, **22** (1986) 6533.
- [14] Y. Ozeki, *J. Phys. A*, **28** (1995) 3645; *J. Phys. Cond. Mat.*, **9** (1997) 11171.
- [15] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys. C*, **6** (1973) 1181.
- [16] R. B. Griffiths, *J. Math. Phys.*, **8** (1967) 478, 484.
- [17] D. G. Kelly and S. Sherman, *J. Math. Phys.*, **9** (1968) 466.
- [18] R. B. Griffiths, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 1 ed. C. Domb and M. S. Green, (London: Academic) (1972) p. 7.
- [19] H. Kitatani, *J. Phys. Soc. Jpn*, **63** (1994) 2070.

謝辞

本研究を指導し、度重なる議論につきあって下さった西森秀稔教授に心から感謝致します。また、Pierluigi Contucci 教授と尾関之康助教授には、多くの有用な助言や議論を頂きました。深く感謝致します。本論文の掲載を勧めて下さり、数々の助言を頂いた笹本智弘助手に、感謝致します。また、本研究を様々な形でサポートして下さい下さった西森研究室及び物性理論グループの皆様に感謝します。